SCHAUM'S outlines

全美经典 学习指导系列

有限元分析

〔美〕G. R. 布查南 著
董文军　谢伟松 译

- 教授有效的解题技巧
- 157道详细解答的习题
- 134道带答案的补充练习题
- 理想的自学读物
- 获得好成绩的帮手

科学出版社
麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1532.0101)
责任编辑：鄢德平　李鹏奇

SCHAUM'S ouTlines

全球销量超越3000万的“全美经典学习指导系列”是您的最佳学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译

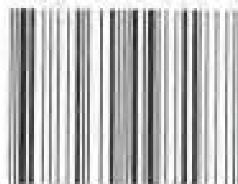
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

概率和统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学
2000工程热力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数学原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学



McGraw Hill

ISBN 7-03-009718-1/O·1532
定价：20.00元

全美经典学习指导系列

有 限 元 分 析

〔美〕G.R.布查南 著

董文军 谢伟松 译

科 学 出 版 社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

有限元方法作为一种由工程师发明的数学计算方法,自其问世以来,在工程计算领域中起着越来越重要的作用.本书是以作者多年来的教学教案为基础编写的.全书共分七章:第一章给出了相关的数学背景知识,第二章和第三章分别讲述二维和三维有限元法,第四章是关于钢梁和网架结构有限元法,第五章讲述了有限元分析中的一些基本原理和方法,第六章讲述等参数有限元方法,第七章介绍了有限元分析中的其他问题.书中大量例题和习题有助于学生学习和掌握有限元方法.

本书可供土木工程、建筑工程、工程力学等专业的本科生及相关的工程技术人员参考.

George R. Buchanan: Schaum's Outline of Theory and Problems of Finite Element Analysis

ISBN: 0-07-008714-8

图字:01-2001-1765 号

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析/(美)布查南(Buchanan, G. R.)著;董文军,谢伟松译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009718-1

Ⅰ.有… Ⅱ.①布…②董…③谢… Ⅲ.有限元分析 Ⅳ.O242.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064948 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:A4(890×1240)

2002年3月第一次印刷 印张:12 3/4

印数:1—4 000 字数:359 000

定价:20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前　言

在我的学术生涯之中，有限元分析这个题目从一个仅为概念性的阶段，完全发展成为当今强大的数值分析方法之一．我第一次开始有关有限元模型和模型计算机编程的重要工作是在20世纪70年代早期．在那个时期我还没有意识到使用此方法所得的结果和所付出的努力相比是值得的，并且等参数有限元，Galerkin方法和更强大的数值积分技术的使用还是很新颖的．在那个时候，我还没有意识到这些思想对有限元方法的使用和发展的影响．但是随着时间的推移，我已成为了这个方法的一个严谨的学生，并具有了一些成功应用它的能力．

本书是以我多年来为有限元分析初始课程所准备的笔记为基础编写的．对于那些具有结构的矩阵分析知识的人来说，本书对于有限元法的介绍有些浅显．我必须强调的是，有限元分析并不是刚度方法或结构的矩阵原理的扩展．应当注意此方法不是用来解决工程问题，而是用来解微分方程．这是一个微小而显著的区别．

本书的重点是应用技术而非技术与方法的理论证明．本书的每一章，特别是第二章至第六章，都有一个特别的主题．第一章简要回顾一些特殊的数学内容．第二章开始讨论Rayleigh-Ritz方法和在应用物理领域中有着广泛应用的并具有各种形态的一维二阶微分方程．由此说明有限元方法是数值分析中Rayleigh-Ritz方法的一个有组织的应用．第三章扩展到二维情形，其中的问题用标准笛卡儿坐标系中的公式表示出来，并强调单元，面积积分和随后的整体有限元模型公式的形成．第二章和第三章的内容偏重理论，但由于它们是作为对有限元方法的更为强大的现代应用，因此它们是必要的．第四章是叙述有限元分析与结构矩阵分析的关系，对于那些对梁和柱的结构问题不感兴趣的读者，可以忽略这一章．对于那些想使用有限元方法解含有一对偏微分方程问题的读者来说，第五章就十分重要了．在那里包含有一个能够支持第二章和第三章所介绍的各种方程使用的基础数学知识的概要．同时第五章介绍了数值分析中非常强大的Galerkin方法，并且它是被用来建立求解控制许多物理现象的偏微分方程组的有限元模型．第六章被用来描述等参数有限元和坐标变换以及与此有关的数值积分．第七章包含一些实际应用问题．在附录中，为那些想要了解理论与计算机应用联系的读者准备了一个计算机源程序．同时本书还包含了一个所述问题的索引，以便于读者查找特殊的应用．

十分感谢那些在本书的准备过程中提供帮助的人们，特别感谢田纳西理工大学的John Peddieson教授多年来对应用数学的讨论；Jehery Abston在例7.23中给出的分析解；Mean Funcheng在例7.11中给出的数值解和Stya P. Naeimetclark女士在计算机，软件和打印中给出的慷慨帮助．芝加哥的超媒体系统有限公司的Abrahan J. Rokach对本书进行审阅．我还感谢Schaum's Division of MaGraw-Hill的编辑John Alian，Davilo Beckwith和Arthm Biderman的耐心与帮助．

G. R. 布查南

库克威尔，田纳西

目 录

第一章　数学背景

1.1 引言

在有限元分析中所需要的数学知识可以从初等变到很复杂.所幸的是大部分的概念可以通过适当的矢量分析、矩阵原理和微分方程得以掌握.这一章将要回顾有关的数学知识,对那些需要了解更多知识的读者,可以参阅书后列出的参考书目.在矢量分析中包含了从初等定义到较为高级的积分原理.涉及到的矩阵原理中包含了初等定义、矩阵运算和联立方程组的解.同时也包括对微分方程的简单处理.微分方程对于解用来检验由有限元方法获得的数值解的边值问题是必要的.最后本章包括了一个矢量分析的讨论,但仅限于笛卡儿张量记号.使用笛卡儿张量(下标)所表示的问题公式化出现在许多有限元的著作中,并且常常可使数学表达更加简洁有效.

1.2 矢量分析

一个矢量定义为可用一个大小和一个与某个坐标参照系有关的方向来描述的物理量.可证明使用矢量分析正确的一个基本概念是,空间中任意方向的物理量可以分解为参照系中互为正交的分量.一旦确定了分量,就可以使用标准的代数运算对它们进行运算.本章就对本书中所需要某些特殊的矢量运算进行回顾.本章中用小写正黑体字母表示矢量.图 1-1 中的矢量为

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{1.1}$$

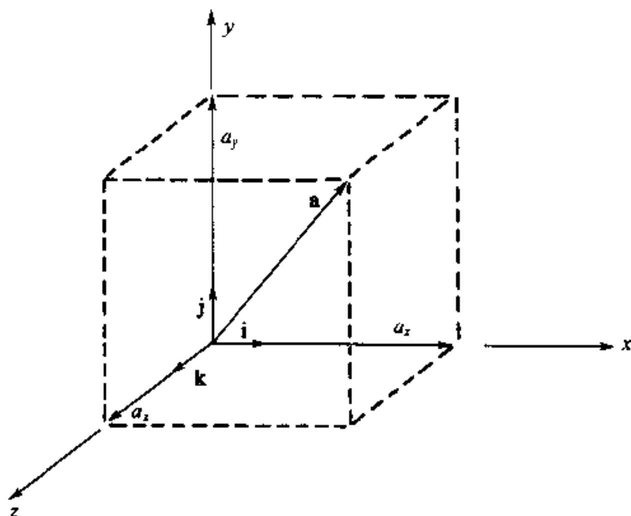


图 1-1

其中 **i**,**j**,**k** 分别表示沿 x, y, z 轴的单位矢量.

微分算子∇定义为

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \tag{1.2}$$

由定义知,这个算子具有矢量特性,并用来定义梯度、散度和旋度这三个基本的矢量运算.当定义诸如*散度原理*和 Green *原理*(有时被称为 Green-Gauss *原理*)的积分矢量原理时,这些矢量运算很有用.

1.3 矩阵理论

矩阵

具有确定行和列的矩形数组就是一个矩阵.一旦一个数组被定义成一个矩阵,那它就有某些属于矩阵理论的数学特性.在有限元分析中不需要复杂的矩阵理论知识,但是一些基本概念对研究有限元分类及其应用来说是必要的.

一个数组可以抽象地写成如下形式

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

本文中用符号[A]表示一个矩阵.矩阵中的项称为元素,当涉及一个元素或一组元素时,使用下标记号,如 a_{ij},其中 i 表示行数,j 表示列数.式(1.3)中的矩阵称为 m 乘 n 矩阵或简称为 $m\times n$ 矩阵,$m\times n$ 称为矩阵的阶.一个行矩阵定义为一个 $1\times m$ 矩阵,类似地,一个列矩阵定义为一个 $m\times 1$ 矩阵,并且经常将列矩阵写为{A}.

两个同为 $m\times n$ 阶的矩阵之间的加法和减法,就是对应元素之间的相加和相减.不同阶的矩阵之间不能定义适当的加减法.矩阵乘法就是一个矩阵被另一个矩阵相乘的过程,写作[A][B];一般地,$[A][B]\neq[B][A]$.在矩阵乘法[A][B]中,称[B]被[A]前乘,称[A]被[B]后乘.

矩阵除法并不是对应元素之间相除.但是可以使用矩阵的逆,写作 $[A]^{-1}$,进行矩阵除法运算,这将在后面讨论.

交换矩阵的行和列就得到矩阵的*转置*,写作 $[A]^T$,在下标中记号,元素交换就是

$$[a_{ij}]^T=[a_{ji}] \tag{1.4}$$

由它得到

$$[[A][B]]^T=[B]^T[A]^T \tag{1.5}$$

对称矩阵就是具有 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$ 性质的方阵.对角矩阵就是除了主对角线上元素外,其余元素均为零的方阵,所谓主对角线就是从左上到右下的对角线.单位矩阵就是特殊的对角阵:所有对角元素都等于1,而所有非对角元素都等于0.

行列式

理解行列式理论中的有关内容,对成功求解有限元分析中的联立方程组是很必要的.在本书中所使用的行列式当然指的是方阵.作为方阵,它具有一般的 $m\times n$ 矩阵所不具有的数学特性.题1.4中就使用行列式定义了矢量积.一般地,用2或3阶行列式就可以明白有关行列式运算的概念.行列式通常*在一组数二边用竖线(而非括号)来表示*.如果一矩阵表记为[A],那么矩阵[A]的行列式就可以用|A|,det[A]或|detA|来表示.

每一个行列式都有一个*行列式方程*.从计算的观点来说,获得高阶行列式的方程是十分困难的.一个3阶行列式的行列式方程可以得到如下

$$|\det A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13} \tag{1.6}$$

它可以表示为主对角线各项的乘积减去次对角线上各项的乘积.此基本概念适用与2阶或3阶行列式,但不适用更高阶的行列式.

*行列子式*就是从原行列式中去掉一行和一列所得的行列式.它也可称为用记号 a_{ij} 表示的

行列式中某元素的子式. 式(1.6)中$|a_{22}|$的子式为

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

它是一个 2 阶行列式. 行列式中元素的余子式定义为 $C_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$, 其中$|M_{ij}|$是元素$a_{ij}$的子式. 现在将原方阵中的每一个元素, 代以行列式的余子式, 就能得到余子式矩阵. 伴随矩阵就是余子式矩阵的转置. 在题 1.14 中就用伴随矩阵计算矩阵的逆.

联立方程组

已经存在许多方法求解一组联立方程, 本书将重点介绍其中的两个过程. 一个联立方程组可以写成矩阵形式:

$$[A]\{x\} = \{f\} \tag{1.7}$$

矩阵[A]代表被未知量{x}相乘的系数矩阵. 右侧的列矩阵包含有已知量 f. 两边乘以[A]的逆, 得到

$$[A]^{-1}[A]\{x\} = [I]\{x\} = \{x\} = [A]^{-1}\{f\} \tag{1.8}$$

使用逆矩阵解大型联立方程组时并不有效.

而有时 Gauss 消去法要比求逆方法快速, 因此也更加有效. Gauss 消去法是一种组织化的方法, 其中将每一个方程都代入到前一个方程中去, 直到最后一个方程只包含一个未知量. 从最后一个方程开始向上运算, 就可以逐步解出所有的未知量. 此方法有时也被称为上三角形法, 通过题 1.16 中的例题可得到此方法的一个最好的说明.

1.4　微分方程

有限元分析是一种关于一个微分方程的数值解的方法. 也就是说, 没有微分方程就没有有限元方法. 许多工程和科技人员是从关于土木工程或飞机结构的结构分析的一种应用中学到有限元方法的. 几十年前有限元分析技巧的情形造成这种形式. 就像第 4 章讨论的那样, 结构分析中经典的刚度方法可在不考虑控制微分方程的情况下推导出来. 这就是说, 推导刚度方法的基本关系是以微分方程的解为基础的, 但是使用者可以很容易忽视此分析的原始含义. 关于梁和框架结构的有限元分析可以以能量原理为基础而不用考虑微分方程. 此外, 这个错误不是由工程和科技人员造成的, 而是在历史上, 没有强调结构分析中的能量方程与控制微分方程之间的联系.

本书中将强调微分方程. 从第 2 章开始微分方程就与对应的变分函数(能量原理)联系起来. 有限元法可以由多种方式推导出来, 但是略去推导时, 此方法是*微分方程的数值解*. 本书的微分方程大都是初等的. 在第 2 章中考虑一个非常基本的微分方程, 在那里还可以看到同一个方程可控制着多个物理原理. 大多数初等方程或许能使读者熟悉有限元理论与微分方程之间的联系, 正是因为这个原因, 第 2 章是非常重要的. 从实际的观点来看, 有限元分析不能用来解一维二阶微分方程, 然而对于理解更复杂的分析问题, 第 2 章是绝对必要的.

微分方程的分析解作为对由有限元法获得的数值解的一个检验是很重要的. 不然的话, 使用者如何知道产生数值解的计算机编码是正确的呢? 第 2 章中的基本微分方程有如下形式

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)A(x)\frac{d\phi(x)}{dx} + C(x)A(x) = 0 \tag{1.9}$$

其中 $\alpha(x)$是一个材料参数并可为 x 的函数, $C(x)$是外部源, $A(x)$是横截面积. 如果材料参数、外部源和面积是 x 的函数, 则表示它们在单元之间是可以变化的. 换句话说, 有限元不用来模拟在单元内部变化的面积和材料参数, 因为它们被模拟成在单元之间变化的. 函数的形式通常不予考虑, 式(1.9)可写成一个更基本的形式为

$$\alpha\frac{d^2\phi}{dx^2} + C = 0 \tag{1.10}$$

它的分析解是初等的. 然而, 像这样的初等解对有限元成功应用是没有价值的. 式(2.19)给出

式(1.10)的一般形式,并可以表示如下

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2}-\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(x)-\gamma\phi(x)+C=0 \tag{1.11}$$

在题 2.1,2.3,2.17,2.18 和 2.28 中给出了一维微分方程的解.题 2.18 给出了一个具有式(1.11)的一般形式的一个方程的解,并且在题 2.28 中给出了一个一维柱坐标系中具有物质特性改变的微分方程的解.在柱坐标系中式(1.11)的对应方程为

$$\frac{\alpha}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}(r)-\gamma\phi(r)+C=0 \tag{1.12}$$

对应式(1.11)的二维方程是一个偏微分方程,将在第三章中讨论并主要用 x,y 坐标来模拟.[见式(3.1)和式(3.2)]分析解将变得更为复杂并用分离变量法求得.在题 3.6 中使用经典逼近和有限元法对矩形平板中稳定温度场的分布进行了讨论.另外,在题 1.17 中对经典逼近进行了讨论.题 3.36 给出了一个类似于质量传输的方程,式(3.2),的理论解.当在同一个问题中同时出现空间和时间坐标时,就会出现偏微分方程.这类偏微分方程将在第五章中予以介绍,并在第七章中将做详细讨论.

有限元在解耦合的常微分方程或偏微分方程时是十分强有力的.此时耦合偏微分方程的分析解将变成一个挑战.弹性方程是一个用有限元法进行研究的早期题目之一,并且在二维或更高维的情形下总是一组耦合方程.第三章将给出在笛卡儿和柱坐标系中的这些方程.第三章和第五～七章讨论耦合偏微分方程.

齐次微分方程出现在数学物理中,它给分析者提出了一个不同于非齐次方程的挑战.由此得到的分析被称为*特征值问题*.解微分方程特征值问题和代数特征值问题的方法能在许多教科书中找到.第七章中将给出几个重要问题的公式和初等有限元的解.

1.5　笛卡儿张量

笛卡儿张量记号是可以引用到任何曲线坐标系中的张量记号的简化形式.笛卡儿张量记号经常被称为*指标记号*或*下标张量记号*,因为仅仅需要下标就可以表示物理方程的适当形式,但是读者必须记住这种记号只对经典的 x,y,z 坐标系有效.本书中当表示一个用有限元法进行模拟的问题的控制方程时,为方便起见就使用笛卡儿张量记号.另外,一旦分析者对有限元模拟熟悉时,就可以直接想像出一个以矢量方程为基础的矩阵有限元方程.

想象一个标准的 x,y,z 坐标系.不使用 x,y,z,而把坐标称为 x_1,x_2,x_3,其中 $x_1\Rightarrow x$,$x_2\Rightarrow y$,$x_3\Rightarrow z$(符号⇒表示相同的意思).在 x,y,z 系统中任何矢量都可以写成 $\mathbf{f}=f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k}$.在 x_1,x_2,x_3 系统中相似的矢量方程应写成 $\mathbf{f}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}$.在写矢量方程时下标记号是必要的

$$\mathbf{f}\Rightarrow f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}\Rightarrow f_i \tag{1.13}$$

其中 i 取 1,2,3.笛卡儿张量记号是矢量记号的简记形式.由矢量的数学定义知,一个矢量可归类于*一阶张量*.虽然可以定义高阶张量,但是在矢量分析中没有与它们对应的量.然而,所有的矢量运算对任意阶的张量都适用.

有两种基本类型的下标记号,*排列与求和*,排列下标如同在式(1.13)说明的那样对应坐标方向,并且一个不重复的单一下标隐含三个量,每一个对应一个坐标方向.一个重复的下标隐含求和,并在题 1.18 中加以说明.关于空间坐标的偏微分可以用在要求微分的变量后加一个逗号来表示,这将在题 1.19 中加以说明.对时间的微商可用在变量上加一点来表示.

在张量分析的数学理论中坐标变换起了一个重要作用.矢量的初等定义是基于任何一个具有数量和方向的物理量都可以表示为一个矢量的这样一个想法.除了这个基本定义,矢量是存在于所有的坐标系统之中,并在这些坐标系之间必存在有效的坐标变换关系,使得变换后的矢量仍为矢量.第三章中使用矩阵来讨论坐标变换.坐标变换矩阵不是一个张量,因为它不具有任何允许在坐标系之间变换的性质.在题 1.20 中给出本章的其他的一些讨论.

例题详解

1.1 一个位置矢量起始于由坐标(10,15,5)定义的空间点 P,终止于由坐标(-2,5,3)定义的空间点 Q,如图 1-2 所示.试用矢量加法和减法的概念来确定这个位置矢量的分量并计算其大小.

解 ☞ 定义位置矢量 $\mathbf{r}_P = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{r}_Q = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.由图 1-2 可以写如下矢量方程

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{PQ} \quad 或 \quad \mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P \tag{a}$$

替换成分量并相加就得所求结果:

$$\mathbf{r}_{PQ} = -12\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \tag{b}$$

此时矢量的大小就是它的实际长度.

$$|\mathbf{r}_{PQ}| = [(-12)^2 + (-10)^2 + (-2)^2]^{1/2} = 15.7 \tag{c}$$

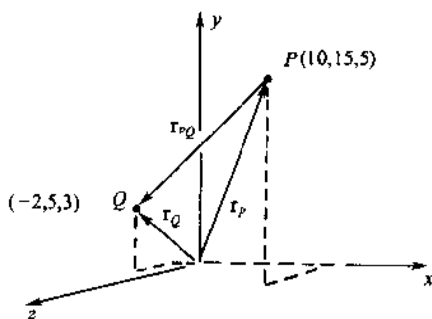


图 1-2

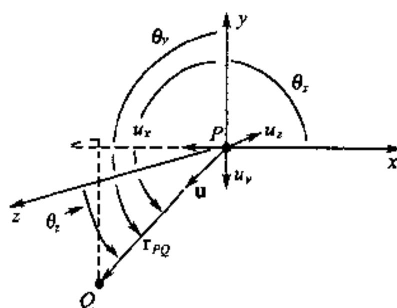


图 1-3

1.2 定义一个单位矢量并计算图 1-2 中由 P 点指向 Q 点的单位矢量的分量.

解 ☞ 单位矢量 $\mathbf{u}$ 就是具有单位大小的矢量.单位矢量的分量必须满足关系

$$[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2]^{1/2} = 1 \tag{a}$$

其中 u_x, u_y 和 u_z 分别是单位矢量在 x, y, z 方向上的分量.使用图 1-2 中的位置矢量来计算单位矢量的分量.在图 1-3 中的局部坐标系下使用 θ_x, θ_y 和 θ_z 来定式位置矢量 $\mathbf{r}_{PQ}$.用 $\mathbf{r}_{PQ}$表示矢量的大小,则矢量的方向余弦定义如下:

$$\begin{aligned}
\cos\theta_x &= \frac{r_{PQx}}{r_{PQ}} = \frac{-12}{15.7} = -0.762, \qquad r_{PQx} = r_{PQ}\cos\theta_x \\
\cos\theta_y &= \frac{r_{PQy}}{r_{PQ}} = \frac{-10}{15.7} = -0.635, \qquad r_{PQy} = r_{PQ}\cos\theta_y \\
\cos\theta_z &= \frac{r_{PQz}}{r_{PQ}} = \frac{-2}{15.7} = -0.127, \qquad r_{PQz} = r_{PQ}\cos\theta_z
\end{aligned} \tag{b}$$

把矢量写成如同式(1.1)中的分量形式,并代换式(b):

$$\mathbf{r}_{PQ} = r_{PQx}\mathbf{i} + r_{PQy}\mathbf{j} + r_{PQz}\mathbf{k} = r_{PQ}(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{c}$$

式(c)就是

$$\mathbf{r}_{PQ} = r_{PQ}(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) = r_{PQ}\mathbf{u} \tag{d}$$

并且方向余弦就是单位矢量的分量,则有

$$\mathbf{u} = -0.762\mathbf{i} - 0.635\mathbf{j} - 0.127\mathbf{k} \tag{e}$$

很容易证明式(d)满足式(a).

1.3 定义两矢量的标量积,并用定义计算图 1-4(b)通过点 B 的矢量 $\mathbf{f}$($\mathbf{f} = -20\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$)的分量.并用矢量形式写出结果.

解 ☞ 图 1-4(a)可说明标量积或点积,由定义知它是一个数量,由下式给出

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a(b\cos\theta) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = b(a\cos\theta)$$

过 B 点的 f 的分量可由 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_{AB}$ 计算.其中 $\mathbf{u}_{AB}$ 是从 A 到 B 的单位矢量.参考题 1.2 中单位矢量的计算:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_{AB}=(-20\mathbf{i}+5\mathbf{j}+12\mathbf{k})\cdot\frac{4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}}{7.81}$$
$$=[(-20)(4)\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+(5)(3)\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+(12)(-6)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}]\div 7.81=-17.5$$

注意 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=(1)(1)\cos 0=1$;类似地,$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=(1)(1)\cos(\pi/2)=0$ 等等.

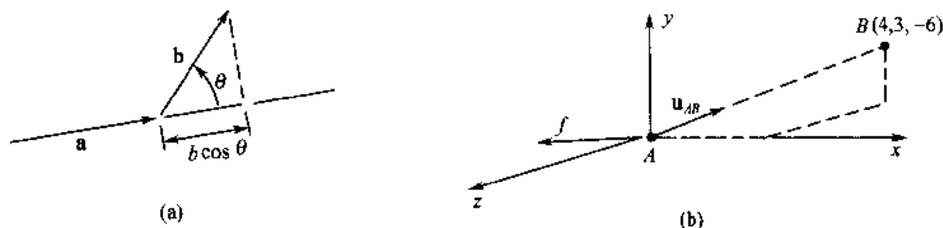


图 1-4

1.4 定义两个矢量的矢量积,并用定义计算矢量积 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,其中 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$.

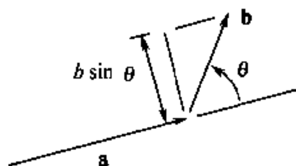


图 1-5

解 ☞ 图 1-5 可说明矢量积或叉积,由定义知它是一个由下式确定的矢量

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a(b\sin\theta) \tag{a}$$

结果矢量垂直于由 a 与 $b\sin\theta$ 确定的平面.由 $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ 可得到相同的数值,但是结果矢量符号相反.矢量叉积可以用行列式来计算

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix}$$
$$=(-12-2)\mathbf{i}+(-1+8)\mathbf{j}+(4+3)\mathbf{k}$$
$$=-14\mathbf{i}+7\mathbf{j}+7\mathbf{k}$$

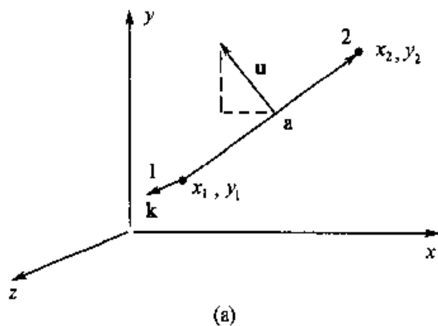
由它得到 $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=(1)(1)\sin 0=0$;相似地,$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=(1)(1)\sin(\pi/2)=\mathbf{k}$,它是 x,y 平面的单位法矢量.另外,$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{k}$.

1.5 计算在 x,y 平面上由 x_1,y_1 和 x_2,y_2 确定的线段单位法线矢量的分量,如图 1-6 所示.

解 ☞ 由矢量积的定义,$\mathbf{k}\times\mathbf{a}$ 是一个垂直于 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{a}$ 确定的平面的矢量,其中 $\mathbf{k}$ 是 z 方向上的单位矢量,如图 1-6 所示

$$\mathbf{k}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=-(y_2-y_1)\mathbf{i}+(x_2-x_1)\mathbf{j}$$

平行于 $\mathbf{k}\times\mathbf{a}$ 单位矢量是



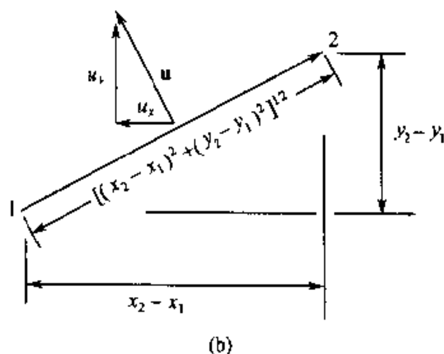


图 1-6

$$\mathbf{u}=\frac{-(y_2-y_1)\mathbf{i}+(x_2-x_1)\mathbf{j}}{[(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2]^{1/2}}$$

可以由图 1-6(b)说明上述结果.

1.6　如图 1-7 所示,三点可决定一个平面三角形.使用矢量分析推导一个根据点的坐标表示的三角形面积的表达式.

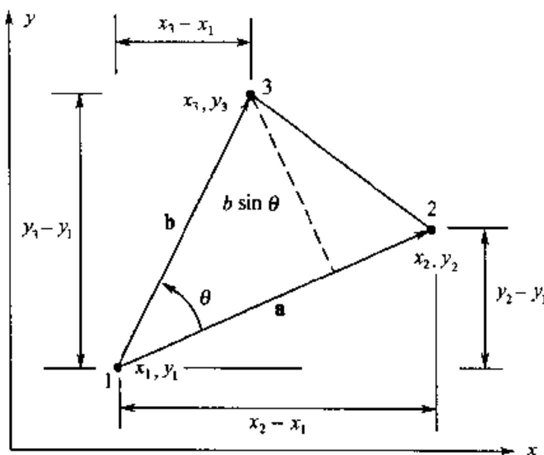


图 1-7

解　☞ 在图 1-7 中所示的那样定义矢量 **a** 和 **b** 和角度 θ.三角形的面积是 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$,并由题 1-4 中的式(a)知面积可以写成

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\mathbf{k} \tag{a}$$

上面的结果显示面积具有矢量的特性.

1.7　定义一个标量函数的梯度.令 ϕ 和 ψ 是两个标量函数并有 $\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$.

解　☞ 标量函数 ϕ 的梯度定义为

$$\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \tag{a}$$

相似地

$$\nabla(\phi\psi)=\frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)\mathbf{k}$$

$$=\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}\right)+\psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{b}$$

1.8　矢量函数的散度定义成 $\nabla\cdot\mathbf{a}$,我们是用标量积的定义来讨论这个矢量运算

解　☞ 由式(1.1)和式(1.2)有

$$\nabla\cdot\mathbf{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}) \tag{a}$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{b}$$

由于算子 ∇ 是作用在 a 上,因此 $\nabla\cdot\mathbf{a}\neq\mathbf{a}\cdot\nabla$.

1.9　散度原理,有时也称作 Gauss 散度原理,能用矢量标记写为(Spiegel, 1959)

$$\int_V\nabla\cdot\mathbf{a}\,dV=\int_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{a}$$

其中 **n** 是作用在体积(区域) V 表面(边界)上的单位外法线矢量.式(a)简单地表明区域中物理量 **a** 的变化等于通过边界流进或流出的物理量.使用散度原理推导 Green-Gauss

原理和有限元概念的应用.

解 ☞ 在许多教科书中都有Green-Gauss原理推导.而为推导有限元模型的Galerkin方法是一个令人感兴趣的应用.考虑一维情形和如下函数的导数,其中 k 可以看成为常数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right)=k\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\psi+k\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\tag{b}$$

在区间 a 到 b 上积分

$$k\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right)\mathrm{d}x=k\int_a^b\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\psi\mathrm{d}x+k\int_a^b\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\tag{c}$$

考虑左端项是一个完整微分:

$$k\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right)\mathrm{d}x=k\int_a^b\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right)=k\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right|_a^b\tag{d}$$

把(d)代入到(c)并重新组合各项:

$$k\int_a^b\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\psi\mathrm{d}x=k\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\psi\right|_a^b-k\int_a^b\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\tag{e}$$

在一维情况下,可以使用分部积分法得到(e).但是上面的推导可推广到2维和3维情形,为此散度理论将变得十分有用.

令式(a)中的 **a** 等于一个标量 β 与一个矢量 **b** 的乘,并代入到式(a)中

$$\int_V\nabla\cdot(\beta\mathbf{b})\mathrm{d}V=\int_S\beta\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S\tag{f}$$

将矢量恒等式 $\nabla\cdot(\beta\mathbf{b})=\beta\nabla\cdot\mathbf{b}+\nabla\beta\cdot\mathbf{b}$ 代入到式(f)中就可得到期望的结果:

$$\int_V\beta\nabla\cdot\mathbf{b}\mathrm{d}V=\int_S\beta\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S-\int_V\nabla\beta\cdot\mathbf{b}\mathrm{d}V\tag{g}$$

式(g)是使用矢量分析的一个经典结果.在有限元理论中式(e)是式(g)的扩展,其中的 ϕ 和 ψ 代表插值函数矩阵.

1.10 设有下面的矩阵,[A]是3×2矩阵,[B]是2×2矩阵,讨论矩阵乘法的演算过程.

解 ☞ 当[A]的行数等于[B]的列数时可以定义矩阵的乘法[A][B].[A]的第1行逐项地被[B]的第1列相乘就得到积矩阵的1,1元素.[A]的第1行被[B]的第2列相乘就得到乘积矩阵的1,2元素.结果如下面所示.有时候为方便起见,常把[A]写在[B]的左下方以便由过[A]的行的水平线与过[B]的列的垂直线的交点就能确定乘积矩阵相应元素的位置.特别当用手工计算矩阵乘法时这个步骤是很有帮助的.

$$[\mathrm{B}]=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}a_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}&a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{bmatrix}$$

一个 $m\times n$ 矩阵与一个 $n\times p$ 矩阵的积是一个 $m\times p$ 矩阵.显然对于上面的[A]和[B]而言,[B][A]不存在.

1.11 假设一个标量函数定义为

$$\phi=N_1\phi_1+N_2\phi_2+N_3\phi_3=\sum_{i=1}^{3}N_i\phi_i\tag{a}$$

把 ϕ 写成矩阵形式.

解 ☞ 定义 $N_i\Rightarrow[\mathrm{N}]=[N_1\quad N_2\quad N_3]$ 和 $\phi_i\Rightarrow[\phi]=[\phi_1\quad\phi_2\quad\phi_3]$.为获得式(a)的结果,矩阵方程必须构造成下面的等价形式之一.

$$\phi=[\mathrm{N}]\{\phi\}=[\mathrm{N}][\phi]^T=[N_1\quad N_2\quad N_3]\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{Bmatrix}=[N_1\quad N_2\quad N_3][\phi_1\quad\phi_2\quad\phi_3]^T$$

1.12 一个行列式的行列式方程可以由行列式的余子式得到.设一个3×3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{a}$$

由余子式可以写出行列式方程

$$a_{11}|a_{11}| - a_{12}|a_{12}| + a_{13}|a_{13}| \tag{b}$$

其中$|a_{ij}|$是余子式且 a_{ij} 是对应的行列式元素. 展开式(b), 可以看出它等价于式(1.6).

解 ☞ 可以使用余子式的定义展开式(b)

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

且它是等价于式(1.6).

1.13 给定一个函数 $y = ax^2$, 其中 a 是一常数. 则 $dy/dx = 2ax$. 在有限元理论中会出现这样的数学运算, 只是在那里函数表示为矩阵方程. 假设[A]是一个 $n \times n$ 的对称矩阵且{X}是一个 $n \times 1$ 矩阵, 那么等价上面函数 y 的矩阵方程是 $y = [X]^T[A]\{X\}$. 并有 $y = [X]^T[A]\{X\}$

解 ☞ 假设[A]是一个 2×2 矩阵, {X}是 2×1 矩阵. 则,

$$y = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{21}x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_{12}x_1 + a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2$$

因为[A]是对称的, 故 $a_{12} = a_{21}$. 则,

$$2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 2[A]\{X\}$$

这一结果对任意阶矩阵都适用.

1.14 给定一个矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

定义或计算, (a)矩阵(行列式)[A]的子式, M_{ij}, (b)矩阵(行列式)[A]的余子式, C_{ij}, (c)矩阵(行列式)[A]的伴随矩阵, (d)矩阵[A]的行列式|A|的值, 和(e)矩阵[A]的逆.

解 ☞ (a)元素 a_{11}的子式就去掉第 1 行和第 1 列后剩下的 2×2 的矩阵:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad 类似 \quad M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad M_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) 元素 a_{11}的余子式形式上可以写成$(-1)^{i+j}|M_{11}|$, 或

$$C_{11} = (-1)^2(-8-4) = -12 \quad C_{12} = (-1)^3(2+4) = -6 \quad C_{13} = (-1)^4(-2+8) = 6$$

$$C_{21} = (-1)^3(-2-8) = 10 \quad C_{22} = (-1)^4(-6+8) = 2 \quad C_{23} = (-1)^5(6+2) = -8$$

$$C_{31} = (-1)^4(2-16) = -14 \quad C_{32} = (-1)^5(6+4) = -10 \quad C_{33} = (-1)^6(12+1) = 13$$

余子式的行列式是一个 3×3 矩阵.

(c) 伴随矩阵是余子式矩阵的转置，或

$$[C]^T = \begin{bmatrix} -12 & 10 & -14 \\ -6 & 2 & -10 \\ 6 & -8 & 13 \end{bmatrix}$$

(d) 行列式可以使用(a)部分中的子式和(b)部分中的余子式来计算. 例如，沿最顶端的行有

$$|\det A| = (3)(-12) + (1)(-6) + (4)(6) = -18$$

(e)[A]的逆可以用下式来计算

$$[A]^{-1} = \frac{[C]^T}{|\det A|}$$

或

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 10 & -14 \\ -6 & 2 & -10 \\ 6 & -8 & 13 \end{bmatrix} \div (-18)$$

读者可以证明$[A]^{-1}[A]=[I]$.

1.15 方阵的逆可以用在解联立方程. 在题 1.14 中讨论的计算逆矩阵的方法在应用上是有局限性的. 而另一种方法在计算机应用上更为可取. 矩阵的逆定义为被[A]相乘后得到一个单位矩阵的逆矩阵$[A]^{-1}$，即

$$[A]^{-1}[A] = [I] \tag{a}$$

通过[A]的增广矩阵可以计算逆.

$$[A \mid I] \tag{b}$$

对式(b)进行行和列的替换把[A]变成一个单位矩阵，对单位矩阵应用相同的运算就会得到逆矩阵，即

$$[I \mid A^{-1}] \tag{c}$$

使用上面描述的方法计算问题 1.14 中的矩阵的逆$[A]^{-1}$.

解 ☞ 将矩阵写成如下形式

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第一行除去 3 使得第一个对角元素变为 1：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第一行乘以 -1 并用第二行减去第一行后，a_{21}变为 0：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3333 & 3.3333 & 0.3333 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第一行乘以 -2 并用第三行减之：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3333 & 3.3333 & 0.3333 & 1 & 0 \\ 0 & 2.6667 & 0.6667 & 0.6667 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

使用第二行对第二列进行同样的操作. 除以 4.333 后将对角元减小到 1：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7692 & 0.0769 & 0.2308 & 0 \\ 0 & 2.6667 & 0.6667 & 0.6667 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第二行再乘以 0.333 并用第一行减之. 同样第二行乘以 2.667 并用第三行减之：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1.0769 & 0.3077 & -0.0769 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7692 & 0.0769 & 0.2308 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3843 & 0.4616 & -0.6155 & 1 \end{array}\right]$$

第三行除以 −1.3843：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1.0769 & 0.3077 & -0.0769 & 0\\0 & 1 & 0.7692 & 0.0769 & 0.2308 & 0\\0 & 0 & 1 & -0.3334 & 0.4446 & -0.7224\end{array}\right]$$

第三行乘以 1.079 并用第一行减之.同样第三行乘以 0.7692 并用第二行减之：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0.6668 & -0.5557 & 0.7780\\0 & 1 & 0 & 0.3334 & -0.1112 & 0.5557\\0 & 0 & 1 & -0.3334 & 0.4446 & -0.7224\end{array}\right] \tag{d}$$

现在(d)中的矩阵如同(c)中的形式.则[A]的逆为

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}0.6668 & -0.5557 & 0.7780\\0.3334 & -0.1112 & 0.5557\\-0.3334 & 0.4446 & -0.7224\end{bmatrix} \tag{e}$$

并可通过对题 1.14 中结果的比较或通过矩阵乘法的计算公式$[A]^{-1}[A]=[I]$得到证实.

1.16 使用高斯消去法解联立方程

$$\begin{aligned}4x_1+2x_2-2x_3-8x_4&=4\\x_1+2x_2+x_3\quad\quad&=2\\0.5x_1-x_2+4x_3+4x_4&=10\\-4x_1-2x_2\quad\quad-x_4&=0\end{aligned}$$

解 ☞ 上述方程可以写成矩阵方程形式：

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & -2 & -8\\1 & 2 & 1 & 0\\0.5 & -1 & 4 & 4\\-4 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\2\\10\\0\end{Bmatrix} \tag{a}$$

第 1 行除以 4.用第 2 行减去第 1 行.第 1 行再乘以 0.5 并用第 3 行减之.第 1 行再乘以 −4 并用第 4 行减之.结果为

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & -0.5 & -2\\0 & 1.5 & 1.5 & 2\\0 & -1.25 & 4.25 & 5\\0 & 0 & -2 & -7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\9.5\\4\end{Bmatrix}$$

第 2 行除以 1.5.第 2 行乘以 −1.25 并用第 3 行减之.由于在第 4 行中已经出现了 0,因此不需更改.结果为

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & -0.5 & -2\\0 & 1 & 1 & 1.3333\\0 & 0 & 5.5 & 6.6667\\0 & 0 & -2 & -7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0.6667\\10.3333\\4\end{Bmatrix}$$

第 3 行除以 5.5.第 2 行乘以 −2 并用第 4 行减之.

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & -0.5 & -2\\0 & 1 & 1 & 1.3333\\0 & 0 & 1 & 1.2121\\0 & 0 & 0 & -4.5758\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0.6667\\1.8788\\7.7576\end{Bmatrix}$$

第 4 行除以 −4.5758,经过代换可解出未知量

$$x_1=0.0794\quad x_2=-1.0066\quad x_3=3.9338\quad x_4=-1.6954$$

1.17 使用分离变量法解题 3.6 中定义的稳定温度场分布问题.许多教材中都定义了解偏分方程的分离变量法.例如参见 Hildebrand(1962)

解 ☞ 在图 3-6 中描述了这个问题,并可用 Laplace 方程表示为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{a}$$

并且 $T(0,y)=T(x,0)=T(L,y)=0$ 和 $T(x,W)=T_0$.假设存在一个分离变量的解

$$T(x,y)=X(x)Y(y) \tag{b}$$

并代入到方程(a)中:

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}Y+X\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}=0$$

将函数分类组合并等于常数:

$$-\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}=k^2 \tag{c}$$

由上式得到两个常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}+k^2X=0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}-k^2Y=0 \tag{d}$$

上两式都可作为常系数线性齐次方程进行求解.设第一个方程有形如 $X=Ce^{mx}$ 解.代入到方程并得 m.所以方程的特征方程是 $m=\pm ki$.关于 X 的通解为

$$X=\sum A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad 其中 \quad k_n=\frac{n\pi}{L} \tag{e}$$

由边界条件 $X(0)=0$ 和 $X(L)=0$ 得到 $B_n=0$,且

$$0=A_n\sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right)$$

作类似的假设 $Y=Ce^{my}$可得到第 2 个方程的解.此方程的特征方程是 $m^2-k^2=0$,它的通解为:

$$Y=\sum C_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)+D_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \tag{f}$$

其中 k_n 是先前定义的 $n\pi/L$.由边界条件 $Y(0)=0$ 得到 $D_n=0$,并且式(b)变为

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \qquad 其中 \quad E_n=A_nC_n \tag{g}$$

将最后一个条件 $T(x,W)=T_0$ 代入到(g)中,再利用三角函数的正交性来确定 E_n.方程两边同乘以 $\sin(m\pi x/L)$并在 0 到 L 上积分.

$$\int_0^L T_0\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=\int_0^L\sum_{n=1}E_n\sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \tag{h}$$

由于

$$\int_0^L\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ L/2, & m=n\end{cases}$$

则可以从(h)中解出 E_n

$$E_n\sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)=\frac{2}{L}\int_0^L T_0\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \tag{i}$$

计算出 E_n 并代入到(g)中就可以得到题 3.6 的分析解.

1.18 给定一个矢量 **a** 和 **b**,利用数量积说明求和下标

解 ☞ 标量积也常称为内积.如果有内积的话,就应有外积.但是由于外积用来定义高阶张量,因此它不用在矢量分析之中.矢量 **a** 与 **b** 的标量积可写成如下形式

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{a}$$

其等价的张量表述为

$$a_ib_i=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{b}$$

式(a)和式(b)是等价的.重复的下标隐含着求和,而且求和符号经常被省略.两矢量的外积应写成 a_ib_j,其中 i 和 j 都是从 1 取到 3.

1.19 在题 1.8 中已经说明了一个矢量函数的散度.使用笛卡儿张量记号写出相同的函数.

解 ☞ 使用撇号表示微分.一个标量函数的偏微商写为

$$\nabla\cdot A=\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial A}{\partial z}\mathbf{k} \tag{a}$$

并且具有矢量的特性.相应地用张量下标标记表示为 $A_{,i}$,其中 i 是一个排列下标并隐含三个在每个

坐标轴上的量：

$$A_{,i} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial x_1}, \frac{\partial A}{\partial x_2}, \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \tag{b}$$

一个矢量函数的散度写为$\nabla \cdot \mathbf{a} \Rightarrow a_{i,i}$，其中重复的下标隐含求和：

$$a_{i,i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{c}$$

式(a)可以与题 1.8 中的式(b)对照.

1.20 第三章中的式(3.14)和式(3.15)定义了二维空间中矢量的坐标变换，并在第四章中被再次的定义和使用. 参照图 3-2 使用张量的下标标记讨论矢量的坐标变换.

解 ☞ 参照式(3.14)和式(3.15)，并视其他关于 z 轴的旋转，则可把变换扩展到三维. 在 x, y, z 坐标系和 ξ, η, z 坐标系中 z 轴是相同的. 并且在使用张量标记时，对于有撇号(新系统)和无撇号(旧系统)的坐标系也是相同的. 对矢量 $\mathbf{f}$ 从旧坐标系(x_1, x_2, x_3)到新坐标系的矢量变换为：

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

式(a)相应的张量表述为

$$f'_i = a_{ij} f_j \tag{b}$$

由于可以用矩阵乘法由 f 来计算 f'，因此变换 a_{ij} 可以看成一个矩阵，如同在式(a)所写那样. 但是当使用张量标记时，同一个变换才被称为变换. 原因是变换可以扩展到高阶张量情形，但是对高阶张量的变换不能用矩阵乘法来计算. 参照式(b)，并计算下列变换.

令 $i=1$ 并通过对 j 的求和展开 f'_1 的方程

$$f'_1 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} f_j = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3$$

令 $i=2$ 并通过对 j 的求和展开 f'_2 的方程

$$f'_2 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} f_j = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3$$

令 $i=3$ 并通过对 j 的求和展开 f'_3 的方程

$$f'_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} f_j = a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + a_{33} f_3$$

用相同的方法可计算 2 阶或更高阶张量的变换. 对应于从有撇号的坐标系到原始坐标系的逆变换是式(b)的逆

$$f_k = a_{jk} f'_j \tag{c}$$

可以对它进行展开和求证.

1.21 三维热传导的控制方程可以写为

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q \tag{a}$$

并且当 $k_x = k_y = k_z = k$ 时，能写为

$$\nabla^2 T = \frac{Q}{k} \tag{b}$$

(a) 使用张量标记写出式(a)

(b) 使用张量标记写出式(b)

解 ☞ (a) 物质常数 k 可以定义成笛卡儿坐标系中的一个二阶张量

$$k_{kj} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} \quad k_{kj} = 0, \quad k \neq j \tag{c}$$

则式(a)变为

$$k_{kj} T_{,kj} = Q \tag{d}$$

式(d)隐含一个双求和，并且没有排列项，这就意味着只有一项. 观察式(c)求和即为

$$k_{11}T_{,11}+k_{22}T_{,22}+k_{33}T_{,33}=Q$$

(b) $T_{,kk}=Q/k$ 隐含表示 $T_{,11}+T_{,22}+T_{,33}=Q/k$.

1.22 张量 δ 定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{a}$$

由它可知一阶张量可以写成

$$f_i=\delta_{ij}f_j \tag{b}$$

解 ☞ 展开上式即可得证. 证明张量 δ 与题 1.20 中的 a_{ij} 有关, 并且它还定义了 a_{ij} 所必须满足的正交条件.

从上面的式(b)开始, 并使用问题 1.20 中的式(c)变换左端:

$$f_i=a_{ki}f'_k=\delta_{ij}f_j$$

使用题 1.20 中的式(b)变换 f'_k, $f'_k=a_{kj}f_j$

$$a_{ki}a_{kj}f_j=\delta_{ij}f_j$$

$$(a_{ki}a_{kj}-\delta_{ij})f_j=0 \quad 或 \quad a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij} \tag{c}$$

任何有效的坐标变换都必须满足式(c).

1.23 当使用下面定义的排列符号时,

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & 当\ i,j,k\ 不构成\ 1,2,3\ 的一个排列\\ +1, & 当\ i,j,k\ 构成\ 1,2,3\ 的一个偶排列\\ -1, & 当\ i,j,k\ 构成\ 1,2,3\ 的一个奇排列\end{cases}$$

题 1.4 中的矢量积可写成笛卡儿张量标记形式, 如下

$$\mathbf{c}_i=\varepsilon_{ijk}\mathbf{a}_j\mathbf{b}_k \tag{a}$$

解 ☞ 使用式(a)写出一个矢量的卷积.

一个矢量的卷积可写成

$$\mathrm{curl}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix} \tag{b}$$

其相应的下标形式为

$$\varepsilon_{ijk}f_{k,j}=[(f_{3,2}-f_{2,3}),(f_{1,3}-f_{3,1}),(f_{2,1}-f_{1,2})] \tag{c}$$

展开式(b)就可证明式(c).

补充习题

1.24 证明图 1-7 中的三角形的面积公式可由下式给出

$$A=\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

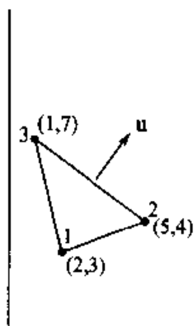


图 1-8

1.25 图 1-8 显示了一个三角有限单元. 计算边 2-3 的单位法矢量.

1.26 一个三维有限单元可以表现为一个有四个边的四面体. 计算图 1-9 所示三维有限单元中由点 1, 2, 4 所确定平面的单位法矢量的分量.

1.27 证明

$$[[A][B]]^T=[B]^T[A]^T$$

1.28 使用题 1.11 中的结果, 用矩阵形式写出矢量 **A** 的散度.

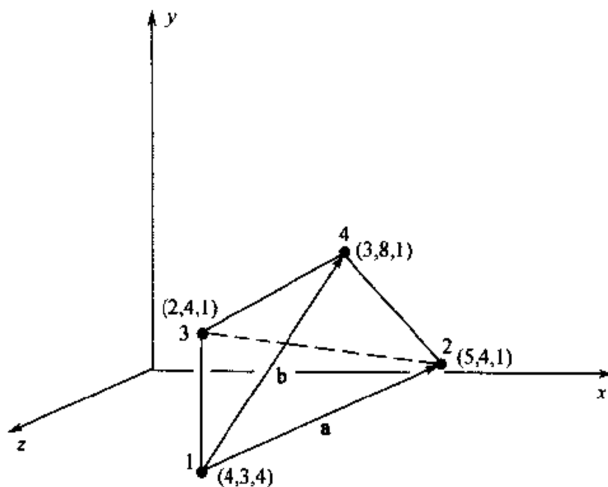


图 1-9

1.29 一个联立的偏微分方程组为

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=A$$
$$C_{12}=C_{21} \tag{a}$$
$$C_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=B$$

其中 u 和 v 定义如下

$$u=[N(x,y)]\{u\} \quad 和 \quad v=[N(x,y)]\{v\}$$

或

$$u=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3 \quad 和 \quad v=N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3$$

将 $\{u\}$ 和 $\{v\}$ 定义在一个如下的数组里是理想的.

$$[U]=[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$$

构造表示式(a)的矩阵方程.

1.30 参考题 1.12 并证明 $a_{11}|a_{11}|-a_{12}|a_{12}|+a_{13}|a_{13}|$ 等于 $a_{11}|a_{11}|-a_{21}|a_{21}|+a_{31}|a_{31}|$, 其中的行列式可由任意的行或列展开.

1.31 假设一个标量函数 $J(u)=k(Bu)^2$, 其中 k, B 和 u 定义如下: [k] 是一 $n\times n$ 矩阵, [B]是一 $n\times m$ 矩阵, [u]一 $m\times p$ 矩阵. 使用一个矩阵方程讨论 $J(u)$.

1.32 对题 1.31 中的矩阵方程, 计算 $\partial J(u)/\partial[u]$.

1.33 在第二章中讨论了可以描述各种物理问题的一维微分方程. 一个描述热传导的方程可有下面的形式

$$k\frac{d^2T}{dx^2}+Q=0 \tag{a}$$

如题 1.11 假设 T 可以写成

$$T=\phi_1T_1+\phi_2T_2=[\phi_1 \quad \phi_2]\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\end{Bmatrix}=[\phi]\{T\} \tag{b}$$

其中 $\{T\}$ 是一个常量, 并且 $[\phi]$ 是 x 的函数. 假设第 2 个矩阵函数 $[\psi]=[\psi_1 \quad \psi_2]$, 它同样是 x 的函数. 将式(b)代入到式(a), 然后被 $[\phi]$ 前乘并在 a 到 b 上对 x 积分. 用例 3 中的式(e)证明 Green-Gauss 原理可应用于矩阵方程.

1.34 假设一个矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\1 & 1 & -4\\-1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

定义或计算, (a)矩阵(行列式)[A]的子式, M_{ij}, (b)矩阵(行列式)[A]的余子式, C_{ij}, (c)矩阵(行列式)[A]的伴随矩阵, (d)矩阵[A]的行列式 |A| 的值, (e)矩阵[A]的逆.

1.35 使用题 1.15 中的方法计算题 1.34 中的矩阵的逆.

1.36 使用高斯消去法解联立方程

$$
\begin{aligned}
2a+\ b+2c-3d&=0\\
2a-2b+\ c-4d&=5\\
a\qquad +2c-3d&=-4\\
4a+4b-4c+\ d&=-6
\end{aligned}
$$

1.37 使用笛卡儿张量标记写出题1.9中方程(f)和(g).

1.38 在第三章中式(3.4),式(3.5)是用应力表示的物质守恒的二维方程.在三维情形下应力有9个分量,并且可用所谓的应力张量的二阶张量来表示这9个分量的一个完全集.在笛卡儿坐标下这些应力可用下标 x,y,z 来表示.在笛卡儿张量标记中,它们用下标1,2,3来表示,并有如下类推

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\Rightarrow\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{a}
$$

应力张量是对称的,表示为,$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$当$i\neq j$.参照式(3.4)和式(3.5)推导三维守恒方程,再用张量标记表示方程.

1.39 二阶张量的坐标变换是题1.20中讨论的矢量变换的扩展,并可写为

$$
\sigma'_{rs}=a_{ri}a_{sj}\sigma_{ij} \tag{a}
$$

证明由从初等材料力学导出的二维弹性应力变换方程可由式(a)给出.

1.40 在题1.7中定义了一个标量函数的梯度.使用笛卡儿张量标记重写题1.7中的式(b).

1.41 使用下标张量标记写出题1.11中的式(f)和(g)以及矢量恒等式$\nabla\cdot(\beta\mathbf{b})=\beta\nabla\cdot\mathbf{b}+\nabla\beta\cdot\mathbf{b}$

补充习题答案

1.24 展开题1.6中的行列式和(a)式来证明它们是相等的.

1.25 参考题1.5.$\mathbf{u}=0.6\mathbf{i}+0.8\mathbf{j}$

1.26 参考题1.5和图1-9.$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=12\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

$$
\mathbf{u}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}=\frac{(12\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k})}{(216)^{1/2}}
$$

1.27 假设矩阵[A]和[B].展开矩阵就可证明结果.

1.28 一矢量的散度是$\nabla\cdot A$.定义$[\nabla]=[\partial/\partial x\quad \partial/\partial y\quad \partial/\partial z]$和$[A]=[A_x\quad A_y\quad A_z]$,则结果为$[\nabla][A]^T$.

1.29 定义如下矩阵:

$$
[C]=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\quad [L]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\end{bmatrix}
$$

$$
[N]=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3\end{bmatrix}\quad \{A\}=[A\quad B]^T
$$

则,$[L][C][L][N]\{U\}=\{A\}$

1.30 展开余子式并比较各项.

1.31

$$
J(u)=\underset{p\times m}{\{u\}^T}\underset{m\times n}{[B]^T}\underset{n\times n}{[k]}\underset{n\times m}{[B]}\underset{m\times p}{\{u\}}
$$

1.32 使用题1.31的结果并注意$[B]^T[k][B]$是对称的.参照题1.31则

$$
\frac{\partial J(u)}{\partial\{u\}}=2[B]^T[k][B]\{u\}
$$

1.33 设k是一常数,则式(a)可写成

$$
k\frac{d^2}{dx^2}[\phi]\{T\}+Q=0 \tag{c}
$$

或定义另一矩阵$k\Rightarrow[k]$和$d^2/dx^2\Rightarrow[d^2/dx^2]$,且式(c)可写为

$$
[k]\left[\frac{d^2}{dx^2}\right][\phi]\{T\}+Q=0 \tag{d}
$$

用$[\phi]^T$乘以式(d):

$$\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Bmatrix}_{2\times1}[k]_{1\times1}\left[\frac{d^2}{dx^2}\right]_{1\times1}[\phi_1 \quad \phi_2]_{1\times2}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}_{2\times1}+\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Bmatrix}_{2\times1}Q=0 \tag{e}$$

注意由式(d)得到的结果是一个 1×1 矩阵,由式(e)得到的是一个 2×1 矩阵,这表示有两个方程.矩阵相乘后得到两个方程为

$$\begin{aligned}\psi_1 k\left|\frac{d^2\phi_1}{dx^2}\right|T_1+\psi_1 k\left|\frac{d^2\phi_2}{dx^2}\right|T_2+\psi_1 Q=0\\ \psi_2 k\left|\frac{d^2\phi_1}{dx^2}\right|T_1+\psi_2 k\left|\frac{d^2\phi_2}{dx^2}\right|T_2+\psi_2 Q=0\end{aligned} \tag{f}$$

对两个方程积分并应用 Green-Gauss 原理[题 1.9 的式(e)]:

$$-\int_a^b\frac{d\psi_1}{dx}k\frac{d\phi_1}{dx}T_1dx-\int_a^b\frac{d\psi_1}{dx}k\frac{d\phi_2}{dx}T_2dx+\psi_1 k\frac{d\phi_1}{dx}T_1\Big|_a^b+\psi_1 k\frac{d\phi_2}{dx}T_2\Big|_a^b$$

$$+\int_a^b\psi_1 Q dx=0$$

$$-\int_a^b\frac{d\psi_2}{dx}k\frac{d\phi_1}{dx}T_1dx-\int_a^b\frac{d\psi_2}{dx}k\frac{d\phi_2}{dx}T_2dx+\psi_2 k\frac{d\phi_1}{dx}T_1\Big|_a^b$$

$$+\psi_2 k\frac{d\phi_2}{dx}T_2\Big|_a^b+\int_a^b\psi_2 Q dx=0$$

写成矩阵形式为

$$\int_a^b\begin{bmatrix}\frac{d\psi_1}{dx}k\frac{d\phi_1}{dx} & \frac{d\psi_1}{dx}k\frac{d\phi_2}{dx}\\ \frac{d\psi_2}{dx}k\frac{d\phi_1}{dx} & \frac{d\psi_2}{dx}k\frac{d\phi_2}{dx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}dx=\begin{bmatrix}\psi_1 k\frac{d\phi_1}{dx} & \psi_1 k\frac{d\phi_2}{dx}\\ \psi_2 k\frac{d\phi_1}{dx} & \psi_2 k\frac{d\phi_2}{dx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}_a^b+\int_a^b\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Bmatrix}[Q]dx \tag{g}$$

式(g)就是对式(e)应用 Green-Gauss 原理的结果

1.34　(a)

$$M_{11}=\begin{bmatrix}1&-4\\2&2\end{bmatrix}\quad M_{12}=\begin{bmatrix}1&-4\\-2&2\end{bmatrix}\quad M_{13}=\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&2\end{bmatrix}\quad M_{22}=\begin{bmatrix}4&-1\\-1&2\end{bmatrix}\quad M_{23}=\begin{bmatrix}4&-2\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&-4\end{bmatrix}\quad M_{32}=\begin{bmatrix}4&-1\\1&-4\end{bmatrix}\quad M_{33}=\begin{bmatrix}4&-2\\1&1\end{bmatrix}$$

(b)

$$C_{11}=10\quad C_{12}=2\quad C_{13}=3$$

$$C_{21}=2\quad C_{22}=7\quad C_{23}=-6$$

$$C_{31}=9\quad C_{32}=15\quad C_{33}=6$$

(c) 伴随矩阵就是余子式矩阵的转置,或

$$[C]^T=\begin{bmatrix}10&2&9\\2&7&15\\3&-6&6\end{bmatrix}$$

(d) 行列式可以有(a)中的子式和(b)中的余子式得到

$$|\det A|=33$$

(e) [A]的逆可计算为

$$[A]^{-1}=\frac{[C]^T}{|\det A|}$$

或

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}10&2&9\\2&7&15\\3&-6&6\end{bmatrix}\div 33$$

1.36　矩阵为

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & -3\\2 & -2 & 1 & -4\\1 & 0 & 2 & -3\\4 & 4 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\b\\c\\d\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\5\\-4\\-6\end{Bmatrix}$$

上三角矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 1 & -3\\0 & 1 & 0.3333 & 0.3333\\0 & 0 & 1 & -1.1429\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\b\\c\\d\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-1.6667\\-4.1429\\10.80\end{Bmatrix}$$

解得 $a=12.0, b=-8.0, c=-8.2, d=10.2$.

1.37

$$\int_V(\beta b_i)_{,i}\mathrm{d}V=\int_S\beta b_i\mathbf{n}_i\mathrm{d}S$$

$$\int_V\beta b_{i,i}\mathrm{d}V=\int_S\beta b_i\mathrm{n}_i\mathrm{d}S-\int_V\beta_{,i}b_i\mathrm{d}S$$

1.38

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial y}+f_x&=0\\\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+f_y&=0\\\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial y}+f_z&=0\end{aligned}\tag{a}$$

用笛卡儿张量标记,式(a)变为

$$\sigma_{kl,l}+f_k=0\qquad\sigma_{kl}=\sigma_{lk}\tag{b}$$

式(b)中第一个方程称为线动量平衡,式(b)中第二个方程称为角动量平衡.注意展开之后,式(b)变为

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\sigma_{13,3}+f_1&=0\\\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+\sigma_{23,3}+f_2&=0\\\sigma_{13,1}+\sigma_{23,2}+\sigma_{33,3}+f_3&=0\end{aligned}\tag{c}$$

1.39 二维应力张量可写为

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\\sigma_{xy} & \sigma_{yy}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\\sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

变换为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\tag{b}$$

用 $r=s=1$ 展开式(a)并注意 i 和 j 是 1 到 2 得求和指标

$$\sigma'_{11}=a_{11}a_{11}\sigma_{11}+a_{11}a_{12}\sigma_{12}+a_{12}a_{11}\sigma_{21}+a_{12}a_{12}\sigma_{22}$$

用 $r=1$ 和 $s=2$ 展开式(a)

$$\sigma'_{12}=a_{11}a_{21}\sigma_{11}+a_{11}a_{22}\sigma_{12}+a_{12}a_{21}\sigma_{21}+a_{12}a_{22}\sigma_{22}$$

用 $r=2$ 和 $s=1$ 展开式(a)

$$\sigma'_{21}=a_{21}a_{11}\sigma_{11}+a_{21}a_{12}\sigma_{12}+a_{22}a_{11}\sigma_{21}+a_{22}a_{12}\sigma_{22}$$

用 $r=s=2$ 展开式(a)

$$\sigma'_{22}=a_{21}a_{21}\sigma_{11}+a_{21}a_{22}\sigma_{12}+a_{22}a_{21}\sigma_{21}+a_{22}a_{22}\sigma_{22}$$

注意 $\sigma'_{12}=\sigma'_{21}$.代入式(b)中得

$$\begin{aligned}\sigma'_{11}&=\sigma_{11}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin^2\theta+2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta\\\sigma'_{12}&=(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta+\sigma_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\sigma'_{21}\\\sigma'_{22}&=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta-2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

1.40

$$\nabla(\phi\psi)\Rightarrow(\phi\psi)_{,k}=\phi\psi_{,k}+\psi\phi_{,k}$$

1.41 题 1.11 中方程(f)为

$$\int_V(\beta b_j)_{,j}\mathrm{d}V=\int_S\beta b_jn_j\mathrm{d}S\tag{a}$$

矢量恒等式$\nabla\cdot(\beta\mathbf{b})=\beta\nabla\cdot\mathbf{b}+\nabla\beta\cdot\mathbf{b}$是

$$(\beta b_j)_{,j}=\beta b_{j,j}+\beta_{,j}b_j$$

题 1.11 中方程(g)为

$$\int_V \beta b_{j,j}\mathrm{d}V=\int_S \beta b_j n_j\mathrm{d}S-\int_V \beta_{,j}b_j\mathrm{d}V \tag{b}$$

第二章　一维有限元分析

2.1　引言

本章将向大家介绍有限元分析的基本原理.在本章中,将把诸多工程问题转化为与之等价的一维形式的控制方程,并同时介绍相应于上述一维控制方程、而且仅仅适用于一维问题的有限元方法.总而言之,这一章将针对某些实例对有限元分析的基本内容和主要方法加以阐述.

注意到,采用有限元方法可以给出相应的微分方程边值问题的近似数值解.本章将通过求解微分方程的变分形式,给出微分方程的解.由于物理问题的边界条件是由变分形式自然给出的,因此上述问题的变分形式常常包含了某些边界条件.为了便于阐述基本概念,本章中的变分函数将不考虑边界条件,典型微分方程的边界条件由相应的物理条件给出.

本章将具体介绍微分方程数值求解方法的所有基本概念.而对于那些由微分方程所表示的物理问题,如果没有与之相应的变分函数,其数值求解方法将在后续章节中进行介绍.

2.2　工程问题的数学物理方程

工程问题的控制方程通常由其基本方程和平衡方程给出,本节将具体介绍诸多不同物理问题的一维控制方程,其控制方程在基本形式上是大体一致的,并采用与相关工程领域中的用法相一致的数学符号.从变分原理出发,可以给出相应的物理问题的有限元模型.对于质量、力、长度、时间、温度以及能量等不同的物理量,其单位物理量分别用 M、F、L、t、T 和 E 来表示.

一维弹性问题

在法向应力和轴向外力的作用下,直杆上力的平衡问题可以表示为一维微分方程问题.设坐标 x 处的应力分布为 $\sigma(x)$,截面积为 $A(x)$,轴向外力为 $f(x)$.则直杆在该处的应力为 $\sigma(x)A(x)$,考虑到外力对直杆的作用,可以得到如下的基本方程:

$$\frac{\mathrm{d}[\sigma(x)A(x)]}{\mathrm{d}x}+f(x)A(x)=0 \tag{2.1}$$

由 Hooke 定律,应力和截面 x 处的伸长率(即应变)ε 之间的关系由构成直杆材料的弹性系数 $\epsilon(x)$给出。利用杨氏模定律,应变与轴向位移 $u(x)$之间满足如下关系:

$$\sigma(x)=E(x)\varepsilon(x) \qquad 和 \qquad \varepsilon(x)=\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

或

$$\sigma(x)=E(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.3}$$

联合式(2.1)和式(2.3),可以得到如下关于位移 $u(x)$的二阶微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]+f(x)A(x)=0 \tag{2.4}$$

上述方程有两类不同形式的边界条件:一类为自然边界条件;另一类为几何边界条件或称为本质边界条件.在本书中,关于 $u(x)$的边界条件为本质边界条件;关于 $\sigma(x)$的边界条件为自然边界条件.

相关物理量的单位:$\sigma(x)$为 F/L^2,$A(x)$为 L^2,$f(x)$为 F/L^3,ε 为 L/L,$E(x)$为 F/L^2,$u(x)$为 L.

将力的守衡方程与定义悬索的斜率的基本几何方程相结合,可以将发生微小弯曲后悬索的平衡问题视为弹性问题.利用小扰动原理,假设悬索的张力 T 为常量,则作用在悬索上的合力满足如下方程(参见题 2.1):

$$T\frac{d\theta(x)}{dx} - k(x)v(x) = -f(x) \tag{2.5}$$

这里 $\theta(x)$为悬索的斜率，$v(x)$为悬索在垂直方向上的扰动量，$k(x)$为悬索的弹性模量，$f(x)$为作用在悬索上的沿垂直方向的荷载.利用小扰动原理，知道 θ 为一个小量.从而可以导出悬索的基本几何方程，亦即 θ 可以近似地表示为

$$\theta = \frac{dv}{dx} \tag{2.6}$$

由式(2.6)可以得出，张力沿垂直方向的分量为

$$F_y = T\frac{dv}{dx} \tag{2.7}$$

联合式(2.5)和式(2.6)，得到如下的控制方程：

$$T\frac{d^2v(x)}{dx^2} - k(x)v(x) = -f(x) \tag{2.8}$$

这里关于 $v(x)$的边界条件为本质边界条件；而由(2.7)给出的关于 F_y 的边界条件为自然边界条件.值得注意的是，上述边界条件应与给定的斜率 θ 等价.

相关物理量的单位：T 为 F，$\theta(x)$为 L/L，$v(x)$为 L，$f(x)$为 F/L，$k(x)$为 F/L^2.

热传导问题

从能量守衡方程和基本方程可以推出描述一维定常热传导问题的基本方程.能量守衡原理要求热通量 q 的变化与外部的热源 Q 相等，亦即：

$$\frac{d[q(x)A(x)]}{dx} = Q(x)A(x) \tag{2.9}$$

这里 $A(x)$为传热面积，Q 的相反数表示从系统传出去的热量.其基本方程(也称为 Fourier 定律)为：

$$q(x) = -k(x)\frac{dT(x)}{dx} \tag{2.10}$$

这里 T 表示温度，k 代表热传导系数.联合式(2.9)和(2.10)，得到如下的二阶控制微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)A(x)\frac{dT(x)}{dx}\right] + Q(x)A(x) = 0 \tag{2.11}$$

这里关于 T 的边界条件为本质边界条件；而关于 $q(x)$的边界条件为自然边界条件.

相关物理量的单位：$q(x)$为 E/tL^2，$A(x)$为 L^2，$Q(x)$为 E/tL^3，$T(x)$为 T，$k(x)$为 E/tLT.

位势流

作用流体力学领域中的一个特殊方面，位势流广泛应用于地下水流动问题之中.在上述应用中，可以假设流体为定常不可压流动，从而可以完全由连续方程或质量守衡方程描述以上问题.假设面积为一常数，则一元势函数可以假设为

$$\phi(x) = -K(x)h(x) = -K(x)\left(\frac{z+p}{\gamma}\right) \tag{2.12}$$

以及

$$u(x) = \frac{d\phi}{dx} \tag{2.13}$$

这里 u 为流动速度，h 为压力头，z 为高度头，γ 为地下水问题中水的比重，p 为压力，K 为渗透率或水力学传导系数.其基本方程由 Darcy 定律给出

$$u(x) = -K\frac{dh(x)}{dx} \tag{2.14}$$

上式表明 Darcy 定律与由式(2.12)给出的位势流的定义是相关的.注意到一维定常不可压缩流动满足 $du/dx=0$，并联合式(2.12)—(2.14)，有

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \tag{2.15}$$

方程(2.15)的解为线性函数,因而一维流动问题的速度为一常数.然而,与之相应的二维问题(2.15)的解却比较复杂,有关内容将在本书后面的章节中加以介绍.上述问题中关于 ϕ 的边界条件为本质边界条件;而关于速度的边界条件为自然边界条件.

相关物理量的单位:$\phi(x)$为 L^2/t, $h(x)$为 L, $K(x)$为 L/t, $u(x)$为 L/t.

质量输运方程

对于大多数的基本位势流问题,如果其流动是定常的、且控制方程与式(2.15)相似,则将发生扩散现象.在此类问题中,质量方程的平衡将以稀释混合项的形式写出.上述理论广泛应用于物理问题之中.特别的,当把地下水流动问题视为位势流问题时,可以假设有某种物质与地下水构成混合物共同流动,并同时在混合物中进行扩散.因而可以将位势流理论与质量扩散理论相结合,得到主要物理问题的一个较为全面的描述.假设截面积为一常数,则稀释混合项的质量平衡可以表示为

$$u(x)\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}j(x)}{\mathrm{d}x}+K_rC(x)=m \tag{2.16}$$

这里 $u(x)$表示混合物的流动速度;$C(x)$、$j(x)$分别表示稀释项的浓缩系数和流通量;K_r表示稀释项与其周围物质之间的反应速度,例如化学反应;m 表示外部的质量源函数.其基本方程称为 Fick 定律,可以表示为

$$j(x)=-D(x)\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.17}$$

这里 $D(x)$为扩散系数,联合式(2.16)和(2.17)可以得到如下的控制方程:

$$u(x)\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[D(x)\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\right]+K_rC(x)=m \tag{2.18}$$

这里假设速度 $u(x)$是已知的.其中关于 $C(x)$的边界条件为本质边界条件;而关于流通量 $j(x)$的边界条件为自然边界条件.

相关物理量的单位:$C(x)$为 M/L^3, $D(x)$为 L^2/t, $u(x)$为 L/t, K_r 为 t^{-1}, $j(x)$为 M/L^2t.

电流

静电控制方程与热传导方程是相似的.下面的电荷平衡方程给出了电量分布 $D(x)$与电荷密度 $\rho(x)$之间的关系:

$$\frac{\mathrm{d}[A(x)D(x)]}{\mathrm{d}x}=\rho(x)A(x) \tag{2.19}$$

这里 $A(x)$为垂直于 x 轴的横截面面积,电场 $E(x)$与电势 $\phi(x)$之间的关系满足:

$$E(x)=-\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.20}$$

相应的基本方程为

$$D(x)=\varepsilon(x)E(x)=-\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.21}$$

这里 $\varepsilon(x)$表示材料的电容.联合式(2.19)和(2.21),得到如下的控制方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varepsilon(x)A(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\rho(x)A(x)=0 \tag{2.22}$$

其中关于 ϕ 的边界条件为本质边界条件;而关于 D 的边界条件为自然边界条件.

相关物理量的单位:$D(x)$为 Q/L^2, $A(x)$为 L^2, $\rho(x)$为 Q/L^3, $E(x)$为 V/L, $\phi(x)$为 V, $\varepsilon(x)$为 C/L.

方程(2.4)、(2.11)、(2.15)和(2.22)是类似的,而方程(2.8)和(2.18)则附加了依赖于相关变量的其他项,并且方程(2.18)中含有未知变量及其一、二阶导数项.

2.3 变分函数

变分的计算是求泛函极值问题的一种数学方法.作为一种积分形式,如果将某一函数代入

到一个泛函之中，该泛函具有一个确定的数值.变分计算的主要问题是求函数 $f(x)$，使得函数的小变差 $\delta f(x)$不至于改变原来的泛函.研究变差的计算并将其应用于有限元理论之中，将涉及到线性代数、泛函分析和拓扑学原理等相关知识.本章将介绍变分计算的最基本理论，并由此介绍如何将泛函变分用于构造有限元模型.2.2 节中各方程的变分函数的用法，与应变能量和最小势能原理在弹性理论和结构理论中的用法是相类似的.

除了含有一阶导数项的方程(2.18)以外，2.2 节中其他控制方程的变分函数可以写成统一的形式.只不过在本书后续内容中，由于有限单元上的面积和材料弹性系数等项将被视做常数，所以上述方程中的相应项也将设为常数.记 $f=f(x)$，有

$$J_1(f)=\int_V\frac{1}{2}\left[\alpha\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2+\beta f^2-2\gamma f\right]\mathrm{d}V \tag{2.23}$$

含有一阶导数项的方程则不一定有相应的变分函数，如方程(2.18).然而，为了得到上述方程的有限元模型，可以采用伪变分函数或拟变分函数来表示相应的控制微分方程.如果记方程(2.18)中的 $C=C(x)$，则与其相应的拟变分函数为

$$J_2(C)=\int_V\frac{1}{2}\left[D\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right)^2+Cu\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}+K_rC^2-2mC\right]\mathrm{d}V \tag{2.24}$$

后续内容(见题 2.2)表明，对于本章中的控制微分方程，式(2.23)经过适当变形即可得到相应方程的特征变分函数；而采用类似的分析过程(见题 2.15)却不能由式(2.24)经过适当变形导出方程(2.18)的特征变分函数.不过，可以由式(2.24)导出方程(2.18)的有限元模型，具体过程详见题 2.16.

一般情况下，变分格式中包含有边界条件.因而从这一角度来讲，式(2.23)的表示并不完善.然而，变分函数给出了函数与本章中微分方程之间的对应关系，并成为初步研究有限元方法的必要条件.有关变分原理的其他内容将在第五章中加以讨论.

题 2.2 阐述了由变分函数推导控制方程的经典方法.另外，题 2.3 阐述了由变分函数推得近似解的方法.上述两个例子是由式(2.23)推得的，而由式(2.24)经过类似计算得到的却是不正确的结果.因此称式(2.24)为拟变分函数.采用 Rayleigh-Ritz 方法，将某一近似函数代入相应微分方程的变分函数，可以得到该方程的近似解.上述方法在问题 2.3 中进行了介绍，这里的近似函数必须满足问题的边界条件.

2.4 插值函数

有限元方法的基本概念是指连续函数可以近似表示为离散模型.这里的离散模型是由一个或多个插值多项式组成的，而连续函数被分成有限段(或有限片、有限块)，亦即有限个单元、每一个单元由一个插值函数所定义，用以刻画单元在端点之间的状态.有限单元的端点称为节点.

2.5 形状函数

形状函数(也称为形函数)常用字母 N 来表示，它通常为插值多项式的系数.在某一个有限单元中，不同的节点有其各自的形函数，它在该点的函数值为 1，而在该单元上其他节点处的函数值为 0.插值多项式和形函数这两个概念经常交替使用，第六章中详细叙述了二者的区别.

2.6 刚度矩阵

刚度矩阵这一名词来源于结构分析.有限元方法的早期应用类似于矩阵的结构分析，用以描述力和位移之间的矩阵关系.现在，在提到刚度矩阵时，不再考虑其应用.温度与热通量之间的矩阵关系称为刚度矩阵.

有限元方法定义了两个刚度矩阵：单元刚度矩阵对应于独立的某一个单元；整体刚度矩阵

由所有的单元刚度矩阵组装而成,定义的是整个系统的刚度矩阵.

2.7 连通性

连通性是指有限元模型中的一个单元与相邻单元的连接.在本章中,对于每个节点处有一个未知量的一维线性两点单元而言,局部单元上的微分运算是主要的.上述单元的左端点的编号为1,右端点的编号为2.显然,整体有限元模型中的所有点不能都记为点1或点2.整体模型和局部模型之间通过连通度矩阵进行联系.如果整体模型中含有N_{el}个有限单元,每个单元中含有N_{node}个节点,则连通度矩阵的维数为$N_{el}\times N_{node}$.如图2-1所示,整体模型中含有5个用罗马字母表示的单元,而局部模型和整体模型之间通过一个如表2.1所示的5×2阶连通度矩阵进行联系.

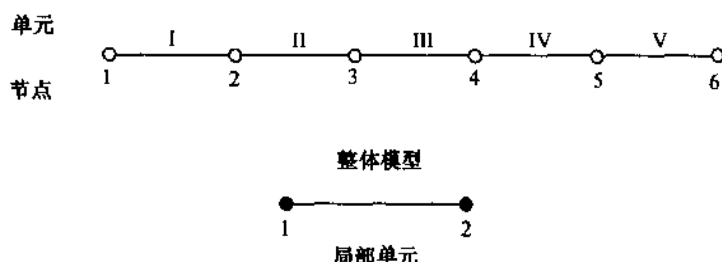


图2-1　整体及局部有限元模型

表2.1　图2-1的连通度矩阵

整体单元	局部单元	
	节点1	节点2
Ⅰ	1	2
Ⅱ	2	3
Ⅲ	3	4
Ⅳ	4	5
Ⅴ	5	6

题2.10采用图示法对连通度进行了说明,指出了各单元刚度矩阵与整体刚度矩阵之间的关系.对于二维和三维单元而言,每个节点的自由度都大于1(即每个节点处的未知量都多于一个),其连通度将更加复杂.

2.8 边界条件

在2.2节中,边界条件分为本质边界条件和自然边界条件两种.采用解析方法可以得到类似于本章中所介绍的二阶方程的解,只不过这里需要计算两个积分常数.为计算上述积分值,必须给出两个边界条件,这些边界条件通常在问题的一维定义域的两端分别给出.边界条件一般按照未知量的具体数学形式进行分类.

在数学术语中,本质边界条件也称作Dirichlet边界条件.由方程(2.11),长为L的等截面均匀直杆的一维定常状态的热传导问题,可以表示为如下的Dirichlet问题:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+Q=0 \tag{2.25}$$

$$T(0)=T_0 \quad 和 \quad T(L)=T_L \tag{2.26}$$

这里的两个边界条件都是针对于温度给定的.这类边界条件的应用见题2.10和2.12.

实际问题的 Neumann 边界条件在两个边界点上都是给出一阶导数值;这类问题称为 Neumann 问题.对于热传导问题,其 Neumann 边界条件是给出通量所满足的条件,例如方程(2.25)联合[见式(2.10)]

$$k_0\frac{\mathrm{d}T(0)}{\mathrm{d}x}=q_0 \quad 和 \quad k_L\frac{\mathrm{d}T(L)}{\mathrm{d}x}=q_L \tag{2.27}$$

这类边界条件给理论求解和数值求解都带来了不少困难.只有在给定某一点温度的条件下,上述问题才是惟一可解的.本书中将不讨论类似于式(2.27)的边界条件的有限元分析.

第三类边界条件称为混合边界条件.这类边界条件相当于式(2.26)和式(2.27)的组合,是最常用的一类边界条件.实际上有两种混合边界条件:一种情况是一个边界条件为本质边界条件,而另一个边界条件为自然边界条件.题 2.13 就是这类混合边界条件的一个例子;第二类混合边界条件,例如热传导方程的边界条件为

$$k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+h(T-T^{\infty})=0 \tag{2.28}$$

这里 h 为对流项系数,T^{∞}为边界面以外介质的温度.上述边界条件表明边界通量与边界温度结合等于某一已知温度.第二类边界条件可以为本质边界条件和自然边界条件,也可以为类似于式(2.28)的形式.读者们需要特别注意这类边界条件,具体说明见题 2.14.

2.9 柱面坐标系中的问题

诸如热传导和静电分布等一维轴对称微分方程与方程(2.11)和(2.22)是相似的.与方程(2.22)相对应的轴对称柱面坐标系下的电势方程为

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\varepsilon}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}+\rho=0 \tag{2.29}$$

由于此处的定义域对应于柱面边界的周线,故面积为常数.方程(2.29)可以简写为

$$\frac{\varepsilon}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)+\rho=0 \tag{2.30}$$

与之相应的变分函数为

$$J(\phi)=\int_{r1}^{r2}\left[\pi r\varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)^2-2\pi r\rho\phi\right]\mathrm{d}r \tag{2.31}$$

这里用 $2\pi r\mathrm{d}r$ 代替了 $\mathrm{d}V$.

2.10 直接方法

直接方法通常用来叙述从矩阵结构分析到有限元常用概念的发展过程.其主要目的是利用从材料力学导出的直杆或梁问题的解法.例如材料力学中,在定常外力 P 的作用下,直杆上的轴向应力为 $\sigma=P/A$.将以上定义与方程(2.3)相结合,可以导出直杆在沿轴向外力作用下的形变

$$u=\frac{PL}{AE} \tag{2.32}$$

这里 u 是直杆的两端沿轴向受均匀外力P 作用时,长度为 L 的直杆的整体形变.由式(2.32)可给出刚度矩阵.基于式(2.32)的推导过程一般包括在桁架的应力分析之中,这里每一个桁架可以被视作一个单元.外力 P 通常为桁架节点处的荷载.详见题 2.21.

例题详解

2.1 设悬索的长度为 L,基本模量为 k,作用在悬索上垂直向上的外力为 f.试推出悬索的竖向位移所满足的方程(2.8);并给出悬索的两端面定时,悬索竖向位移的理论解.

解 ☞ 如图 2-2 所示,悬索沿 y 轴的正向向上偏移.因而设荷载 $f(x)$和竖向位移 $v(x)$均为正值.

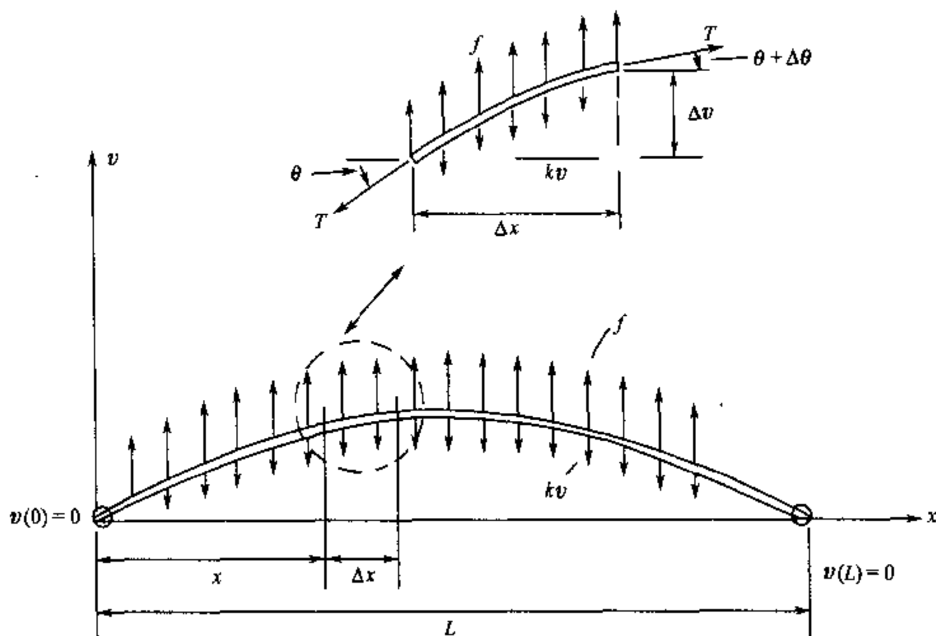


图 2-2

由小位移理论可知，悬索上的张力 T 为常数．将 y 方向上的所有力求和，有

$$-T\sin\theta + T\sin(\theta+\Delta\theta) + f(x)\Delta x - k(x)v(x)\Delta x = 0 \tag{a}$$

小位移理论表明 $\sin\theta\approx\theta$ 和 $\sin(\theta+\Delta\theta)\approx\theta+\Delta\theta$．对式(a)合并同类项，并除以 Δx 有

$$T\frac{\Delta\theta}{\Delta x} - k(x)v(x) = -f(x) \tag{b}$$

对式(b)中的第一项，有

$$\lim_{\Delta x\to 0} T\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = T\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{c}$$

采用相同的求极限过程，并由图 2-2，有

$$\theta = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} \tag{d}$$

将式(c)和式(d)代入式(b)得到控制微分方程

$$T\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} - k(x)v(x) = -f(x) \tag{e}$$

设 $k(x)$和 $f(x)$为常数，可以得到方程(e)的解析解．此时方程为常系数线性方程，有指数形式的解．相应的齐次方程的解为

$$v(x)_H = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

或

$$v(x)_H = A\sinh(\alpha x) + B\cosh(\alpha x) \tag{f}$$

这里 $\alpha^2 = k/T$．方程(e)的一个特解为

$$v(x)_P = \frac{f}{k} \tag{g}$$

联合式(f)和式(g)，并由边界条件 $v(0)=0$ 和 $v(L)=0$，得到问题的终解

$$D(x) = \frac{f[\cosh(\alpha L) - 1]\sinh(\alpha x)}{k\sinh(\alpha L)} - \frac{f}{k}\cosh(\alpha x) + \frac{f}{k} \tag{h}$$

随后的问题之中，将对数值解与真解(h)进行比较．

2.2 设热传导问题的变分函数为式(2.23)，k 和 Q 为常数，则由函数的变差可以导出热传导问题的控制微分方程．

解 ☞ 考虑到式(2.23)，并假设：$f\equiv T$，$\alpha\equiv k$，$\beta\equiv 0$ 和 $\gamma\equiv Q$．则热传导问题的变分函数化为

$$J(T) = \int_V \left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2 - QT\right]\mathrm{d}V \tag{a}$$

记变分算子为 $\delta(\ )$，一般的，式(a)的变分形式为

$$\delta J(T)=\int_V\frac{1}{2}\delta\left[k\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2-2QT\right]\mathrm{d}V \tag{b}$$

考虑到括号中的第一项：

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2=\delta\left[\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\right]=\left[\delta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\right]\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$
$$=2\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$

由此可见微分过程和变分过程可以互换，或写为

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta T)$$

另外，将体积积分改写为由关于截面面积的积分和区间 $(0,L)$ 上的积分组成的二重积分．注意到 $\int_A\mathrm{d}A=A$，变分(b)可以写为

$$\delta J(T)=\int_0^L\left[k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(\delta T)}{\mathrm{d}x}-Q\delta T\right]A\mathrm{d}x \tag{c}$$

对第一项进行分步积分，有

$$\delta J(T)=k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\delta T\Big|_0^L-\int_0^L\left(k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\delta T+Q\delta T\right)A\mathrm{d}x \tag{d}$$

对于 T 的小变差，上述泛函趋于零，而且只有当 $T(0)=T(L)=0$ 时成立．因此可以断定 $\delta T(0)=\delta T(L)=0$，或者 $k\mathrm{d}T(0)/\mathrm{d}x=k\mathrm{d}T(L)/\mathrm{d}x=0$，或者他们的组合等于零，从而式(d)的第一项为零．这也包含了问题的本质边界条件和自然边界条件．在余下的积分中，由于 δT 的任意性(并不一定为零)，因此其中的微分方程等于零，此即方程(2.11)．

$$k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+Q=0 \tag{e}$$

2.3 设等截面均匀直杆的长度为 L，在直杆上各处均匀加热，直杆两端的温度为 $T(0)=T(L)=0$．试采用 Raleigh-Ritz 方法给出问题 2.2 中讨论的一维热传导问题的近似解，并将近似解与真解进行比较．

解 ☞ 求解问题 2.2 中的方程(e)，即

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{Q}{k} \tag{a}$$

可以得到上述问题的真解．将该方程积分两次，得到

$$T=-\frac{Qx^2}{2k}+C_1x+C_2 \tag{b}$$

代入边界条件并经过适当整理，有

$$T=\frac{Q(Lx-x^2)}{2k} \tag{c}$$

Raleigh-Ritz 方法是由 Lord Raleigh(1842—1919)和 Walter Ritz(1878—1909)分别独立提出的．简单的说，是指将方程(a)的解表示为具有若干未知参数的函数，并将其代入到题 2.2 中的方程(a)，而后经过积分运算得到中间计算公式．最后，对上述计算式关于未知参数进行极小化，得到关于未知参数的代数方程组，并通过求解代数方程组给出未知参数的解值．具体地，设

$$T=\sum_{i=1}^{N}c_ix^{i-1} \tag{d}$$

这里 c_i 为未知参数，N 为级数所含有的项数．基于真解的公式(c)，设近似解为一个二次多项式

$$T=c_1+c_2x+c_3x^2 \tag{e}$$

代入边界条件 $T(0)=0$，有 $c_1=0$；再由 $T(L)=0$ 有 $c_2=-c_3L$．从而式(e)变为

$$T=c_3(x^2-Lx) \tag{f}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=c_3(2x-L) \tag{g}$$

将式(f)和式(g)代入题 2.2 中的式(a)，并用 $A\int_0^L\mathrm{d}x$ 代替 $\int_V\mathrm{d}V$，有

$$J = \int_0^L \frac{1}{2}[kc_3^2(4x^2 - 4Lx + L^2) - 2Qc_3(x^2 - Lx)]A\mathrm{d}x$$

或者进行积分，并取极限有

$$J = \frac{Akc_3^2L^3}{6} + \frac{Ac_3QL^3}{6} \tag{h}$$

通过如下计算，即获得使 J 取极小值的 c_3：

$$\frac{\partial L}{\partial c_3} = \frac{2Akc_3L^3}{6} + \frac{AQL^3}{6} = 0 \quad 和 \quad c_3 = -\frac{Q}{2k} \tag{i}$$

将式(i)代入式(f)，得到了近似解：

$$T = \frac{Q(Lx - x^2)}{2k}$$

在本例中，近似解和真解是一致的.

2.4　函数 $u(x)$ 如图 2-3 所示，求其在 u_1 和 u_2 之间有效的一维线性插值多项式.

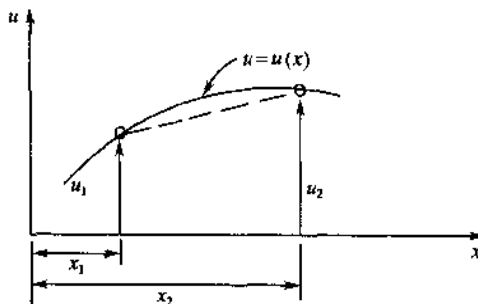


图 2-3

解　☞ 函数 $u(x)$ 如图 2-3 所示. 设在 u_1 和 u_2 之间近似于 $u(x)$ 的一维线性插值多项式为

$$u = A + Bx \tag{a}$$

这里 A 和 B 为常数. 将边界条件 $u(x_1) = u_1$ 和 $u(x_2) = u_2$ 代入上式，可得关于 A 和 B 的两个方程

$$u_1 = A + Bx_1$$

$$u_2 = A + Bx_2$$

从中解得 A 和 B，并代入式(a)，得到插值多项式

$$A = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} \quad B = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

$$u = u_1\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + u_2\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{b}$$

2.5　试推导一维有限元空间的形函数

解　☞ 题 2.4 的结果可以用来推导图 2-3 中点 x_1 处的形状函数. 节点 1 处的形状函数是题 2.4 式(b)中 u_1 的系数，即 $N_1 = (x_2 - x)/(x_2 - x_1)$；类似的，节点 2 处的形状函数是 $N_2 = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$. 注意到，$x = x_1$ 时 $N_1 = 1$，$x = x_2$ 时 $N_1 = 0$；而节点 1 处的 $N_2 = 0$，节点 2 处的 $N_2 = 1$.

2.6　推导基于形状函数和节点的一维线性插值格式，并将结果表示成矩阵形式.

解　☞ 利用题 2.4 给出的插值格式和题 2.5 给出的相应形函数，以及图 2-3 中的记号，插值形式可写为

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 \tag{a}$$

定义 $[N] = [N_1 \quad N_2]$，$\{u\} = [u_1 \quad u_2]^T$，则式(a)可以改写为 $u = [N]\{u\}$. 这里记号 $\{u\}$ 表示列向量，$[\,]^T$ 是 $[\,]$ 的转置矩阵.

2.7　利用 Rayleigh-Ritz 方法，采用两个线性插值多项式求解热传导问题 2.3.

解　☞ 如图 2-4 所示，题 2.4 的插值形式可用来定义近似解. 将定义域用节点 $x_1 = 0$，$x_2 = L/2$ 和 $x_3 = L$ 分成长度为 $L/2$ 的两个单元. 以题 2.4 中的式(b)为模型，写出每个单元中的插值形式. 关于左边的单元，有

$$T = T_1 \frac{x_2 - x}{L/2} + T_2 \frac{x - x_1}{L/2}$$

利用边界条件 $T_1 = 0$，并注意到 $x_1 = 0$，有

$$T = \frac{2T_2 x}{L} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} \tag{a}$$

关于右边的单元，有

$$T = T_2 \frac{x_3 - x}{L/2} + T_3 \frac{x - x_2}{L/2}$$

利用边界条件 $T_3 = 0$，并注意到 $x_3 = L$，有

$$T = 2T_2 \frac{L - x}{L} \quad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \tag{b}$$

变分方程可以写为

$$J(T) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right)^2 - QT \right] A \mathrm{d}x \tag{c}$$

将式(a)和(b)代入式(c)，有

$$J(T) = \int_0^{L/2} \left(k \frac{2T_2^2}{L^2} - 2QT_2 \frac{x}{L} \right) A \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{L} \left(k \frac{2T_2^2}{L^2} - 2QT_2 \frac{L - x}{L} \right) A \mathrm{d}x \tag{d}$$

求积分，并合并同类项，有

$$J(T) = \left(-\frac{2kT_2^2}{L} + \frac{QT_2 L}{2} \right) A \tag{e}$$

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T_2} = \frac{4kT_2}{L} - \frac{QL}{2} = 0 \quad 和 \quad T_2 = \frac{QL^2}{8k} \tag{f}$$

将上式代入式(a)和(b)，有

$$T = \frac{QLx}{4k} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$$

$$T = \frac{QL(L - x)}{4k} \qquad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L$$

可见当 $x = L/2$ 时，数值解是精确的，$T(L/2) = QL^2/8k$. 然而，$x = L/4$ 处的近似解为 $T(L/4) = QL^2/16k$，而真解为 $T(L/4) = 3QL^2/32k$.

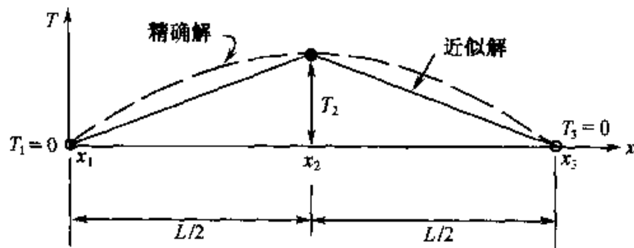


图 2-4

2.8　设横截面面积为常数的弹性杆两端固定，杆长为 $3L$，弹性杆各处受相同的体积力 f 作用. 试采用 3 个长为 L 的线性元，用形状函数(不用插值多项式)给出 Rayleigh-Ritz 解的表达式.

解　☞ 求解过程与题 2.7 相似. 参见图 2-5，采用罗马字母定义单元号，同时采用阿拉伯字母定义节点号. 对单元 Ⅰ，由题 2.6 的式(a)，有

$$u_1 = N_{\mathrm{I}1} u_1 + N_{\mathrm{I}2} u_2 \tag{a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{I}1}}{\mathrm{d}x} u_1 + \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{I}2}}{\mathrm{d}x} u_2 \tag{b}$$

如图 2-5(b)所示，这里 $N_{\mathrm{I}1}$ 是单元 Ⅰ 中节点 1 处的线性形状函数，$N_{\mathrm{I}2}$ 是单元 Ⅰ 中节点 2 处的线性形函数. 而常数 u_1 和 u_2 为相应节点处的位移值. 式(a)中的形函数是关于 x 的函数，而式(b)中的导数运算仅对形状函数产生影响. 由题 2.5 的结果，并设所有单元的长度均为 L，有

$$N_{\mathrm{I}1}=\frac{L-x}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{I}1}}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{L}$$

$$N_{\mathrm{I}2}=\frac{x}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{I}2}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{L}$$

类似的,对单元Ⅱ和单元Ⅲ,有

$$u_{\mathrm{II}}=N_{\mathrm{II}2}u_2+N_{\mathrm{II}3}u_3$$

$$u_{\mathrm{III}}=N_{\mathrm{III}3}u_3+N_{\mathrm{III}4}u_4$$

这里

$$N_{\mathrm{II}2}=\frac{2L-x}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{II}2}}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{L}$$

$$N_{\mathrm{II}3}=\frac{x-L}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{II}3}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{L}$$

$$N_{\mathrm{III}3}=\frac{3L-x}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{III}3}}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{L}$$

$$N_{\mathrm{III}4}=\frac{x-2L}{L}\qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{III}4}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{L}$$

上述形状函数如图 2-5(b)至图 2-5(d)所示,图 2-5(e)显示了将形状函数进行组合并应用边界条件后,得到的解的最终形式.至此得到一个重要的结论:线性形状函数的一阶导数仅仅依赖于单元的长度.单个单元左端点对应的形状函数的导数恒为 $-1/L$,该单元右端点对应的形状函数的导数恒为 $1/L$.同一问题中的所有单元的长度不一定相等,但是本例中简化了形状函数的记法.

将以上各式代入式(2.23),并由边界条件 $u_1=u_4=0$ 有

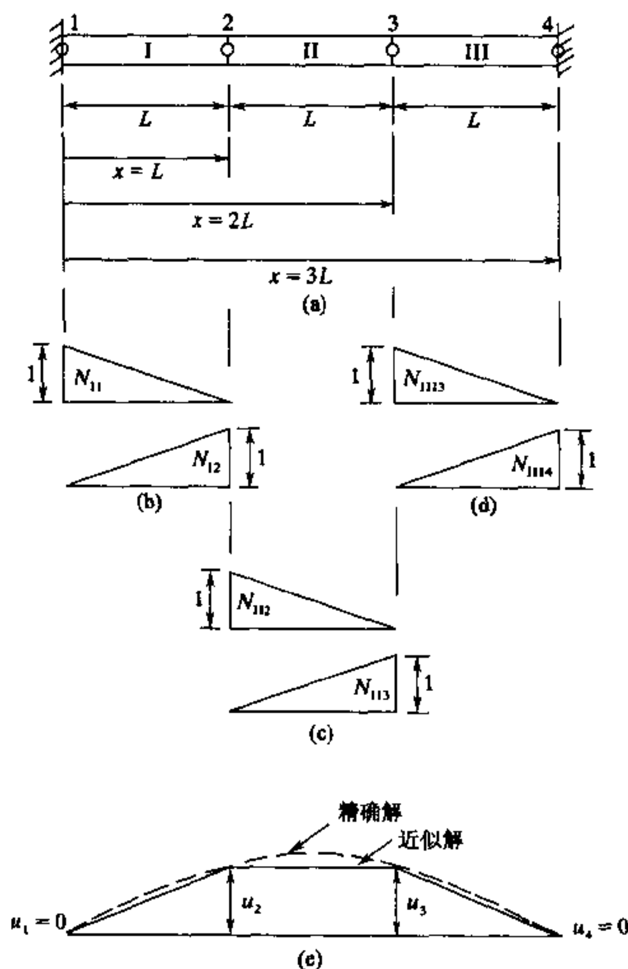


图 2-5

$$J(u)=\int_0^L\left(E\frac{u_2^2}{2L^2}-f\frac{u_2x}{L}\right)A\mathrm{d}x+\int_L^{2L}\left\{\left(E\frac{u_2^2-2u_2u_3+u_3^2}{2L^2}\right)-f\left[\frac{u_2(2L-x)}{L}+\frac{u_3(x-L)}{L}\right]\right\}A\mathrm{d}x+\int_{2L}^{3L}\left(E\frac{u_3^2}{2L^2}-\frac{u_3(3L-x)}{L}\right)A\mathrm{d}x$$

求积分，并整理同类项，有

$$J(u)=EA\frac{u_2^2-u_2u_3+u_3}{L}-AfL(u_2+u_3) \tag{c}$$

对式(c)，关于未知节点位移取极小值，有

$$\frac{\partial J}{\partial u_2}=EA\frac{2u_2-u_3}{L}-fAL=0 \tag{d}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_3}=\mathrm{E}A\frac{-u_2+2u_3}{L}-fAL=0 \tag{e}$$

式(d)和式(e)可以写成如下的矩阵形式

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}=fAL\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{f}$$

由式(f)解得 $u_2=fL^2/E$，$u_3=fL^2/E$．最终结果是

$$u_{\mathrm{I}}=\frac{fLx}{E}\qquad 0\leqslant x\leqslant \mathrm{L}$$

$$u_{\mathrm{II}}=\frac{fL^2}{E}\qquad L\leqslant x\leqslant 2L$$

$$u_{\mathrm{III}}=fL(3L-x)\qquad 2L\leqslant x\leqslant 3\mathrm{L}$$

真解由长度为 $3L$ 的题 2.3 得到：

$$u=f\frac{3L_x-x^2}{2E}$$

当 $x=L$ 和 $x=2L$ 时，近似解是精确的．而在弹性杆的中间部位，当 $x=3L/2$ 时，精确解为 $\frac{9}{8}(fL^2/E)$，误差大约为百分之十一．

2.9 对于与题 2.8 所介绍的弹性杆相类似的直杆，试写出其关于线性形状函数的变分函数．并由变分函数推出描述直杆状态的一般模型或单元刚度矩阵．

解 ☞ 对于长度为 L 的单元，变分函数可以写为

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}A\mathrm{d}x-\int_0^L ufA\mathrm{d}x \tag{a}$$

利用题 2.6 中建立的线性形状函数的矩阵形式，式(a)可改写为

$$J(u)=\frac{A}{2}\int_0^L\{u\}^T\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]^T[\mathrm{E}]\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]\{u\}\mathrm{d}x-\mathrm{A}\int_0^L\{u\}^T[\mathrm{N}]^\mathrm{T}f\mathrm{d}x \tag{b}$$

上式可以改写为如下所示的矩阵乘法形式：

$$J(u)=\frac{A}{2}\int_0^L[u_1\quad u_2]\begin{bmatrix}\mathrm{d}N_1/\mathrm{d}x\\\mathrm{d}N_2/\mathrm{d}x\end{bmatrix}[\mathrm{E}][\mathrm{d}N_1/\mathrm{d}x\quad \mathrm{d}N_2/\mathrm{d}x]\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\mathrm{d}x-\mathrm{A}\int_0^L[u_1\quad u_2]\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix}f\mathrm{d}x \tag{c}$$

在该点上可以将形状函数及其导数代入式(c)，并计算出不同的矩阵乘法以及积分结果．该结果类似于题 2.8 的推导过程．不过式(c)仅描述了矩阵方程，极小化过程将由式(b)描出．参考第一章中有关矩阵导数的概念，有

$$\frac{\partial J(u)}{\partial\{u\}}=\mathrm{A}\int_0^L\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]^\mathrm{T}[\mathrm{E}]\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]\{u\}\mathrm{d}x-A\int_0^L[\mathrm{N}]^\mathrm{T}f\mathrm{d}x=0 \tag{d}$$

利用题 2.8 的结果，进行矩阵计算，有

$$A\int_0^L\begin{Bmatrix}-1/L\\1/L\end{Bmatrix}[\mathrm{E}][-1/L\quad 1/L]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}\mathrm{d}x-A\int_0^L\begin{Bmatrix}(L-x)/L\\x/L\end{Bmatrix}f\mathrm{d}x=0$$

进行矩阵乘法运算，有

$$A\int_0^L\begin{bmatrix}\mathrm{E}/L^2&-\mathrm{E}/L^2\\-\mathrm{E}/L^2&\mathrm{E}/L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}\mathrm{d}x=A\int_0^L\begin{Bmatrix}(L-x)/L\\x/L\end{Bmatrix}f\mathrm{d}x$$

对上式进行积分，得到的最终结果为

$$\begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AfL/2 \\ AfL/2 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

注意到由于不同有限单元的面积有可能发生变化，面积因子没有从方程里提取出来．等号右边的项说明该单元的每一个节点分配到体积力的一半．式(e)是拉伸杆的单元刚度矩阵(某一个单元的刚度矩阵)．任何类似方程的刚度矩阵都是相同的，只不过材料参数有所不同而已．最后，矩阵形式的方程(e)为

$$[\mathrm{K}]\{\mathrm{u}\} = \{\mathrm{f}\} \quad \text{或写为} \quad [\mathrm{K}^e]\{\mathrm{u}\} = \{\mathrm{f}^e\} \tag{f}$$

此处上标 e 代表单元刚度矩阵和单元应力矩阵．

2.10　利用题 2.9 中给出的局部有限元分析，建立题 2.8 中所述弹性杆的单元分析矩阵，并构造其整体刚度矩阵．

解 ☞ 该模型中三个单元的长度、横截面面积和弹性模量是相同的，其单元刚度矩阵由题 2.9 中的式(e)给出．单元Ⅰ和单元Ⅱ、单元Ⅱ和单元Ⅲ分别共用一个节点．这就是连通度的概念．单元Ⅰ和单元Ⅱ在节点 2 处相连通．所有单元的刚度矩阵是相同的，并组合成如下形式的整体刚度矩阵：

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \boxed{AE/L \;\; -AE/L} & & 0 & 0 \\ \boxed{-AE/L \;\; AE/L} & \boxed{AE/L \;\; -AE/L} & & 0 \\ & \boxed{-AE/L \;\; AE/L} & \boxed{AE/L \;\; -AE/L} & \\ 0 & 0 & \boxed{-AE/L \;\; AE/L} & \end{array}\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AfL/2 \\ AfL/2 + AfL/2 \\ AfL/2 + AfL/2 \\ AfL/2 \end{bmatrix}$$

在代入边界条件之前，整体刚度矩阵为 4 阶方阵，其中的行和列由单线分开．三个单元刚度矩阵分别如方框中所示．注意到，其中第二行、第二列的元素值由两个单元刚度矩阵的相关元素合成，第三行、第三列的元素值与之类似．而整体刚度矩阵中的其他元素值或者由一个单元刚度矩阵的相关元素给出，或者为零．等号右边的矩阵说明了均匀体积力荷载的分布情况：每个单元所受荷载力的一半分配给其上的每一个节点．三次使用题 2.9 中的单元刚度矩阵(e)，并将它们在单元节点处进行连接，便可以得到整体刚度矩阵．代入边界条件 $u_1 = u_4 = 0$ 时，只需要删去整体刚度矩阵的第一行、第四行以及第一列和第四列即可．由此得到的 2 阶方阵与题 2.8 中的式(f)是一致的，并可以解得相同的结果．

在有限元分析中，边界条件并不用来删去刚度矩阵的行和列。本例只是以此与问题 2.8 加以比较．一般的求解过程是，将与之相应的对角线元素置为 1(或单位矩阵)，而该对角线元素所在的行和列的其他元素置为零，同时相应修改等号右端的矩阵．该问题的边界条件如果为零位移，其结果为

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = fAL\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

只不过将零位移边界条件作为该方程解的一部分．以上分析方法适用于计算机计算．有关非零本质边界条件的讨论将包含在本章稍后的例题中．

2.11　设悬索在均匀荷载力和弹性力的作用下产生小位移，试解决以下问题：

(a) 写出其变分函数；

(b) 按照题 2.9 所使用的方法，对长度为 L 的单元，推导基于线性形状函数的单元刚度矩阵．

解 ☞ (a) 由题 2.1 可以导出相应的控制微分方程(2.8)，在方程(2.23)中取 $f(x) = v(x)$，$\alpha = T$，$\beta = k$ 和 $\gamma = f$，得到其变分函数为

$$J(v) = \int_V \frac{1}{2}\left\{T\left[\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2 + k[v(x)]^2 - 2fv(x)\right\}\mathrm{d}V \tag{a}$$

(b) 对长度为 L、横截面面积为常数的单元，式(a)关于形函数的矩阵形式为

$$J(v) = \frac{A}{2}\int_0^L \{\mathrm{v}\}^T\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]^T[\mathrm{T}]\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right]\{\mathrm{v}\}\,\mathrm{d}x$$

$$+\frac{A}{2}\int_0^L\{v\}^T[N]^T[k][N]\{v\}dx-A\int_0^L\{v\}^T[N]^T f dx \tag{b}$$

将式(b)中的函数关于$\{v\}$取极小值,有

$$\frac{\partial J(v)}{\partial\{v\}}=\int_0^L\left[\frac{dN}{dx}\right]^T[T]\left[\frac{dN}{dx}\right]\{v\}dx$$

$$+\int_0^L[N]^T[k][N]\{v\}dx-\int_0^L[N]^T f dx=0 \tag{c}$$

通常情况下,由于悬索的横截面面积不会发生变化,这里删去了面积项.式(c)中第一项和第三项的最终结果类似于将题2.9式(e)中的AE替换为T以后的结果.第二项包括了基本模量和形状函数,相应矩阵可以写为

$$\int_0^L\begin{Bmatrix}(L-x)/L\\ x/L\end{Bmatrix}[k][(L-x)/L\quad x/L]\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}dx$$

或

$$\int_0^L k\begin{bmatrix}(L-x)^2/L^2 & x(L-x)/L^2\\ x(L-x)/L^2 & x^2/L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}dx$$

积分并合并同类项,得到单元刚度矩阵

$$\begin{bmatrix}kL/3 & kL/6\\ kL/6 & kL/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}$$

悬索发生小位移的完整的单元刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}T/L & -T/L\\ -T/L & T/L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}kL/3 & kL/6\\ kL/6 & kL/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}fL/2\\ fL/2\end{Bmatrix} \tag{d}$$

2.12 设长度 为 L 的悬索均分为五个单元,其两端固定($v_1=v_6=0$),请利用题2.11给出的单元刚度矩阵,求解悬索的位移问题.这里 $T=600$ lb[①], $L=120$ in[②], $k=0.5$ lb/in^2, $f=2$ lb/in.

解 ☞ 将已知值代入题2.11式(d),构造单元刚度矩阵

$$\begin{bmatrix}25 & -25\\ -25 & 25\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}24\\ 24\end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}29 & -23\\ -23 & 29\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}24\\ 24\end{Bmatrix} \tag{a}$$

将五个单元的单元刚度矩阵(a)通过公共节点连接起来,得到6×6阶的整体刚度矩阵:

$$\begin{bmatrix}29 & -23 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -23 & 58 & -23 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -23 & 58 & -23 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -23 & 58 & -23 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -23 & 58 & -23\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}24\\ 48\\ 48\\ 48\\ 48\\ 24\end{Bmatrix}$$

考虑到边界条件,可以删去矩阵的第一行、第一列以及第六行和第六列;也可以采用问题2.10的做法,将矩阵的第一行、第一列以及第六行和第六列的两个对角线元素置为1,而将其中的其他元素置为0.类似的,将右端项矩阵的第一项和第六项置为0.求解最终的联立方程组,可以得到节点处的位移值.

由题2.1中式(h)给出的悬索问题的真解及其与该问题的有限元解的对比如表2.2所示.

---

① 1lb=0.453592 kg.

② 1 in=2.54 cm.

表 2.2 有限元解和真解 $v(x)$ 的比较(单位:in)

节点	有限元解	真解
1	0.0	0.0
2	1.8548	1.8173
3	2.5903	2.5444
4	2.5903	2.5444
5	1.8548	1.8173
6	0.0	0.0

2.13 设直杆的长度为 0.2 m,$x=0$ 处的温度保持为 100 ℃不变.有强度为 $Q=3\times10^6$ W/m^2 的热源为整个直杆加热,在直杆边界处的热通量为 $q=3\times10^6$ W/m^3,而在 $x=0.2$ m 处以边界热通量 $q=1.8\times10^6$ W/m^2 向外散热,直杆的热传导率为 $k=6000$ W/(m·K).设直杆的横截面面积为 0.4×10^{-3} m^2,试利用五个长度相等的线性元计算各节点处的温度和热通量分布.

解 ☞ 这里将引入三个新概念:(1) $x=0$ 处的本质边界条件为 100℃而不是零边界条件;(2) $x=0.2$ 米处给出的热通量为自然边界条件;(3) 计算每一个单元节点处的热通量.

将问题 2.9 式(e) 中的 AE/L 和 f 分别替换为 Ak/L 和 Q,可得到单元刚度矩阵.注意到,每个单元的长度为 0.2 m/5 = 0.04m、$Ak/L=0.4\times10^{-3}\times6000/0.04=60$ W/K 和 $AQL=0.4\times10^{-3}\times3\times10^6\times0.04=48$ W,单元刚度矩阵为

$$60\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}=48\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix} \tag{a}$$

整体刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}60 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -60 & 120 & -60 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -60 & 120 & -60 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -60 & 120 & -60 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -60 & 120 & -60\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\\ T_5\\ T_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}24\\ 48\\ 48\\ 48\\ 48\\ 24\end{Bmatrix} \tag{b}$$

节点 6 处的通量边界条件为 $q=1.8\times10^6$ W/m^2,它可以表示为如下的边界面积分:

$$\int_S [N]^T q\mathrm{d}S \tag{c}$$

这里的形状函数应该与包含该边界面的单元相呼应.对于此处的一维问题,单元 5 定义了该平面所包含的节点.事实上,节点 6 就是上述边界面的位置,而节点 5 为直杆上某一个节点的位置.单元 5 中含有节点 5 和节点 6 两个点,定义在边界面所处的节点 6 处的形状函数均取常数值,即 $N_5=0$ 和 $N_6=1$.图 2.5 中的单元Ⅲ为类似的单元,该单元的边界面位于节点 4 处,此处的 $N_{Ⅲ3}=0, N_{Ⅲ4}=1$.由式(c)定义的边界面面积为一常数,对式(c)求积分,有

$$\int_S [N]^T q\mathrm{d}S = qA\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=-1.8(10^6)(0.4)(10^{-3})\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -720\end{Bmatrix} \tag{d}$$

由于热量是从直杆向外传播的,故热通量为负.将式(d)迭加到式(b)的右端,且由于仅在节点 6 处有通量,因此只有第六项发生变化,迭加结果为

$$[24 \quad 48 \quad 48 \quad 48 \quad 48 \quad -696]^T \tag{e}$$

式(b)的右端项有时称作应力矩阵.该术语如用于矩阵的结构分析之中,并逐渐应用于所有的有限元分析之中.该矩阵可以被视为影响矩阵.无论应用与否,含有上述项的矩阵将产生一定的作用.本例中通向内部的热源和向外的热通量都是影响因素.

节点 1 处关于温度的非零边界条件必须在公式中表现出来.回想到题 2.10 中规定直杆两端的

本质边界条件均为零，而与之相应的刚度矩阵的行和列中，除对角线处的元素值为 1 外，其他元素均为零．而只需将影响矩阵的首、尾两项用零值代换即可．本题中节点 1 处的温度规定为 100℃．因此其刚度矩阵和应力矩阵必须加以修改，使得 $T_1=100$ 能够通过求解方程组而得到．

该问题的有限元提法(b)可以写为一般的形式

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2N} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{Bmatrix} \tag{f}$$

如果取 $k_{11}=1$，第一行和第一列的其他元素为零，并取 $f_1=100$，则可以解得 $T_1=100$．无论如何，不等于零的 T_1 将影响其他点的温度值．为具体反映这一影响，不妨将方程(f)的左端矩阵相乘，而将 T_1 的值代入到其他方程之中．设 $k_{11}=1$，第一行的其他元素为零，有

$$\begin{aligned} T_1 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= 100 \\ k_{22}T_2 + k_{23}T_3 + \cdots + k_{2N}T_N &= f_2 - 100k_{21} \\ k_{32}T_2 + k_{33}T_3 + \cdots + k_{3N}T_N &= f_3 - 100k_{31} \\ \cdot + \cdot + \cdots + \cdot &= \cdot \quad \cdot \\ \cdot + \cdot + \cdots + \cdot &= \cdot \quad \cdot \\ \cdot + \cdot + \cdots + \cdot &= \cdot \quad \cdot \\ k_{N2}T_2 + k_{N3}T_3 + \cdots + k_{NN}T_N &= f_N - 100k_{N1} \end{aligned} \tag{g}$$

解方程组(g)，得到边界处正确的温度值，并修改其右端项矩阵使之包含了边界处温度的影响．注意到这里将 f_1 取为规定的边界温度 100．否则，如果在节点 1 处除了规定其温度边界条件(即本质边界条件)以外，还规定其通量边界条件(即自然边界条件)，由于同一点不能给两个边界条件，边值问题的边界条件将是不适定的．因此，此处将对应于 f_1 的通量边界条件替换为温度的边界值．

方程组(f)可以写为一般的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2N} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & k_{N2} & k_{N3} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ f_2 - 100k_{21} \\ f_3 - 100k_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N - 100k_{N1} \end{Bmatrix} \tag{h}$$

将通量边界条件式(e)和温度边界条件式(h)合并后，方程组(b)可以改写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & -60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 120 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 120 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & 120 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 48 + (60)(100) \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ -696 \end{Bmatrix} \tag{i}$$

方程组(i)的解即为直杆上的温度分布情况．由题 2.23 给出的真解为

$$T = \frac{3.0(10^6)}{6000}(0.2x - 0.5x^2) - \frac{1.8(10^6)x}{6000} + 100 \tag{j}$$

由式(2.10)，计算出通量分布：

$$q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

以单元 1 为模型，对应于一个单元的有限元格式为

$$q = -k[-1/L \quad 1/L]\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{k}$$

求解完方程组(i)以后,必须对每一个单元进行以上计算.由于每个单元的通量均为常数,故该单元为常数通量单元.换句话说,迄今所用的二项插值公式都给出未知函数一阶导数的常数结果.通量的真解是(见题 2.23)

$$q=-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=-6000\left[\frac{3(10^6)}{6000}(0.2-x)-\frac{1.8(10^6)}{6000}\right] \tag{1}$$

有限元解和真解的比较如表 2.3 所示.本例中各节点处温度的近似解和真解是一致的.在所有节点和各单元的中点计算了通量的真解;每个单元上通量的有限元解均为常数,且与该单元的中点处的值相等.使用更多的单元,可以提高通量的有限元解的精度.

表 2.3　有限元解和真解的比较

节点	温度(℃)		通量(10^6 W/m²)	
	有限元解	真解	有限元解	真解
1	100	100	(单元 1)	$-1.20(x=0.00)$
			-1.26	$-1.26(x=0.02)$
2	91.6	91.6	(单元 2)	$-1.34(x=0.04)$
			-1.38	$-1.38(x=0.06)$
3	82.4	82.4	(单元 3)	$-1.44(x=0.08)$
			-1.50	$-1.50(x=0.10)$
4	72.4	72.4	(单元 4)	$-1.56(x=0.12)$
			-1.62	$-1.62(x=0.14)$
5	61.6	61.6	(单元 5)	$-1.68(x=0.16)$
			-1.74	$-1.74(x=0.18)$
6	50.0	50.0		$-1.80(x=0.20)$

2.14　如图 2-6 所示之固体物质服从于一定的温度微分方程,该方程的边界条件为混合边界条件(2.28).试采用等距离的五个线性单元,并由物质的厚度计算定常状态的温度分布.这里设 $k=250$ W/(m·K), $W=0.1$ m, $h_1=2000$ W/(m²·K), $h_2=5000$ W/(m²·K), $T_1^{\infty}=100$℃, $T_2^{\infty}=50$℃.

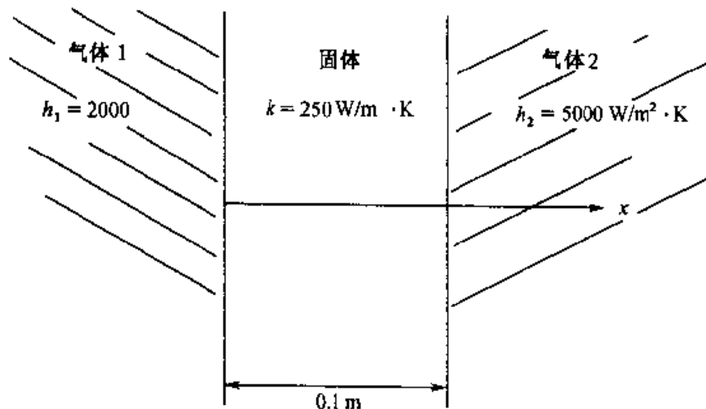


图 2-6

解　在 $x=0$ 处热量向物质内流动,该过程可以表示为

$$-k\frac{\mathrm{d}T(0)}{\mathrm{d}x}+h_1[T(0)-T_1^{\infty}]=0 \tag{a}$$

类似的,在 $x=0.1$ 处热量从物质向外流出,该过程可以表示为

$$k\frac{\mathrm{d}T(0.1)}{\mathrm{d}x}+h_2[T(0.1)-T_2^{\infty}]=0 \tag{b}$$

单元刚度矩阵和整体刚度矩阵的构造方法与题 2.13 的过程相同,常数值的面积可以假设为单位面

积 1.则 $Ak/L=250/0.02=12\,500$,代入边界条件之前的整体刚度矩阵为

$$12\,500\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&0\\0&-1&2&-1&0&0\\0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\\q_5\\q_6\end{Bmatrix}\tag{c}$$

由式(a),并将 $x=0$(节点 1)处的边界条件写为

$$q_1=h_1(T_1^\infty-T_1)$$

或者设常数值的面积为单位面积 1,则对单元 1 有

$$\int_S[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}q\mathrm{d}S=q_1\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}h_1T_1^\infty-h_1T_1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}20\,000-2000T_1\\0\end{Bmatrix}\tag{d}$$

类似的,方程(b)可以用来给出节点 6 处的边界条件

$$q_6=h_2(T_2^\infty-T_6)$$

从而对单元 5,有

$$q_6\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\h_2T_2^\infty-h_2T_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\25\,000-5000T_6\end{Bmatrix}\tag{e}$$

联合方程(c)、(d)和(e),并约去矩阵的公因子 10^4,有

$$10^4\begin{bmatrix}1.45&-1.25&0&0&0&0\\-1.25&2.50&0&0&0&0\\0&-1.25&2.50&-1.25&0&0\\0&0&-1.25&2.50&-1.25&0\\0&0&0&-1.25&2.50&-1.25\\0&0&0&0&-1.25&1.75\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2(10^5)\\0\\0\\0\\0\\2.5(10^5)\end{Bmatrix}$$

边界条件由式(a)和(b)给出,相应的控制微分方程的解为

$$T(x)=T_1^\infty-(T_1^\infty-T_2^\infty)\frac{(x/k)+(1/h_1)}{(1/h_1)+(1/h_2)+(L/k)}\tag{f}$$

在保留小数点后 3 位小数的情况下,有限元解和解析解是相同的.节点处的解分别为 $T_1=77.273$, $T_2=73.636$, $T_3=70.000$, $T_4=66.364$, $T_5=62.727$ 和 $T_6=59.091$.

2.15 采用 Rayleigh-Ritz 分析方法,推导方程(2.24)的拟变分函数.

解 ☞ 利用题 2.2 的分析过程,方程(2.24)的第一项与题 2.2 中的式(a)是相似的.考虑第二项的变分

$$\int_0^L\frac{u}{2}\left[\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\delta C+C\delta\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right)\right]A\mathrm{d}x$$

对该项进行分步积分,有

$$\int_0^L\frac{u}{2}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\delta C-\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\delta C\right)A\mathrm{d}x+\frac{Au}{2}C\delta C\bigg|_0^L$$

可见此项为零.类似的,假设边界条件为齐次的,即 $C(0)=C(L)=0$.则类似于题 2.3 的近似解为

$$C=c_3(x^2-Lx)\quad 和\quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=c_3(2x-L)$$

将其代入 $\int_0^L\frac{1}{2}uC(\mathrm{d}C/\mathrm{d}x)A\mathrm{d}x$,整理后的结果为零.因而函数式(2.24)在 Rayleigh-Ritz 分析中是无效的.

2.16 假设在长为 L 的单元中建立了线性形状函数,试利用式(2.24)的拟变分函数构造质量传输问题(2.18)的单元刚度矩阵.

解 ☞ 由于 Rayleigh-Ritz 解法给出的结果是错误的,因此必须使用题 2.9 和题 2.11 中的矩阵方法构造单元刚度矩阵.为弄清 Rayleigh-Ritz 方法无法给出适定解的原因,需要对有限元方法和变分

原理的某些数学背景知识加以讨论.相关内容将在第五章中给出.

由已知知识,式(2.24)可以改写为

$$J_2(C)=\int_V\frac{1}{2}\left[D\left(\frac{dC}{dx}\right)^2+Cu\frac{dC}{dx}+K_rC^2-2mC\right]dV \tag{a}$$

将体积积分改写为关于定常截面面积和单元长度 L 的重积分,并将式(a)写成基于形函数的矩阵形式,由题 2.11 的方法,有

$$\begin{aligned}J(C)=&\frac{A}{2}\int_0^L\{C\}^T\left[\frac{dN}{dx}\right]^T[D]\left[\frac{dN}{dx}\right]\{C\}dx\\&+\frac{A}{2}\int_0^L\{C\}^T[N]^T[u]\left[\frac{dN}{dx}\right]\{C\}dx+\frac{A}{2}\int_0^L\{C\}^T[N]^T[K_r][N]\{C\}dx\\&-A\int_0^L\{C\}[N]^Tm\,dx\end{aligned}$$

将 $J(C)$ 关于 $\{C\}$ 进行极小化,有

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(C)}{\partial\{C\}}=&\int_0^L\left[\frac{dN}{dx}\right]^T[D]\left[\frac{dN}{dx}\right]\{C\}dx\\&+\int_0^L[N]^T[u]\left[\frac{dN}{dx}\right]\{C\}dx+\int_0^L[N]^T[K_r][N]\{C\}dx-\int_0^L[N]^Tm\,dx=0\end{aligned}$$

其中的第一项、第三项和第四项已经由题 2.9 和题 2.11 解出.注意到由于第四项的符号与微分方程中相应项的符号相反,所以该项的符号与题 2.11 式(c)中相应项的符号相反.其中的第二项是形状函数的转置矩阵乘以速度矩阵乘以形函数的导数矩阵,下面考虑与之相应的第二项的部分元素

$$A\int_0^L\begin{Bmatrix}(L-x)/L\\x/L\end{Bmatrix}[u][-1/L\quad 1/L]\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix}dx=\frac{Au}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix} \tag{b}$$

注意到与先前已经导出的部分刚度矩阵相同,方程(b)中的矩阵也是非对称的.联合方程(b)与题 2.11中式(d)的刚度矩阵,有

$$\left[\begin{bmatrix}D/L&-D/L\\-D/L&D/L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-u/2&u/2\\-u/2&u/2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_rL/3&K_rL/6\\K_rL/6&K_rL/3\end{bmatrix}\right]A\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix}=A\begin{Bmatrix}mL/2\\mL/2\end{Bmatrix} \tag{c}$$

含有速度 u 的项通常为对流项.当 u 相对于 D 比较大时,分析过程是不稳定的.这并不是有限元方法的差错,而是发生于与分析方法无关的数值分析过程.本书中的例子将局限于地下水问题等速度项较小的问题.

2.17 利用问题 2.16 的结果,求下列微分方程在第三个单元上的有限元解和真解

$$u\frac{dC}{dx}-D\frac{d^2C}{dx^2}=m$$

假设问题的边界条件为 $C(x=0)=C(x=3L)=0$.设 $u=D=L=A=1$,试对问题的有限元解和真解进行比较.

解 ☞ 问题的真解是

$$C=-3Lm\frac{1-e^{ux/D}}{u(1-e^{3uL/D})}+\frac{mx}{u} \tag{a}$$

将其代入题 2.16 中的式(c),并设 $K_r=0$,局部单元模型为

$$\left[\begin{bmatrix}D/L&-D/L\\-D/L&D/L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-u/2&u/2\\-u/2&u/2\end{bmatrix}\right]A\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\frac{mLA}{2} \tag{b}$$

由式(b),代入物理参数,整体矩阵构造为

$$\begin{bmatrix}0.5&-0.5&0&0\\-1.5&2.0&-0.5&0\\0&-1.5&2.0&-0.5\\0&0&-1.5&1.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_0\\C_L\\C_{2L}\\C_{3L}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}m/2\\m\\m\\m/2\end{Bmatrix}$$

代入边界条件并求出未知量,有 $C_{2L}=0.769$ m 和 $C_{3L}=1.077$ m.由式(a),可以得到真解为 $C_{2L}=0.730$ m 和 $C_{3L}=0.996$ m.

2.18 在实验室建立一维水槽模型,水槽长 1 m,各处的横截面相同,内有流体流动.$x=0$ 处的高度为 0.3 m,$x=1$ m 处的高度为 0.15 m.在 $x=0$ 处测得某化学污染物的浓度为

0,而在 $x=1$ m 处其浓度为 10 毫克/立方米.在流动过程中,污染物与周围物质以 $K_r=3.0\times10^{-8}$的常数比率发生反应.已知化学物质以扩散系数 $D=1.0\times10^{-8}$向流体中扩散.物质的水力传导率为 $K=1.0\times10^{-7}$.试采用五个线性元计算水槽中化学污染物的稳态分布情况.

解 ☞ 求解该问题需分两步进行.采用 2.2 节中概括的势流理论计算流体的速度,它用于计算质量的输移过程.在上述边界条件下,方程(2.15)的解析解为基本解,并可由此给出势函数的变分和常数值的速度.无论如何,下面将构造有限元解,用以说明整个求解过程.题 2.9 的单元刚度矩阵将作为一个模型,其中常数值的面积作为公因子可以从矩阵方程中约去.可以将题 2.9 式(e)中的基本参数 E 取为单位元 1.0,或用水力传导率 K 代替 E.以上两种情况下的解是相同的,这是由于需要求解的方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-K\frac{d^2h}{dx^2}=0$$

是齐次的.一个单元的长度为 $L=1\text{ m}/5=0.2\text{m}$,单元刚度矩阵的右端项为零.按照题 2.13 中的方法代入非零本质边界条件后,最终的整体刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}1.0&0&0&0&0&0\\0&10.0&-5.0&0&0&0\\0&-5.0&10.0&-5.0&0&0\\0&0&-5.0&10.0&-5.0&0\\0&0&0&-5.0&10.0&0\\0&0&0&0&0&1.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3\\1.5\\0.0\\0.0\\0.75\\0.15\end{bmatrix}$$

求解得到的精确解为 $h_1=0.3,h_2=0.27,h_3=0.24,h_4=0.21,h_5=0.18$ 和 $h_6=0.15$.而速度为常数值,可按照题 2.13 的方法由式(2.14)计算得到.单元 1 上的计算解为

$$u=-\frac{(10^{-7})(0.27-0.30)}{0.2}=1.5(10^{-8}) \tag{a}$$

利用题 2.15 中式(c)建立的单元 1 上关于质量输移的单元刚度矩阵为

$$\left[(10^{-8})\begin{bmatrix}5.0&-5.0\\-5.0&5.0\end{bmatrix}+(10^{-8})\begin{bmatrix}-0.75&0.75\\-0.75&0.75\end{bmatrix}+(10^{-8})\begin{bmatrix}0.2&0.1\\0.1&0.2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}4.45(10^{-8})&-4.15(10^{-8})\\-5.65(10^{-8})&5.95(10^{-8})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix} \tag{b}$$

由式(b)及边界条件 $C(x=0)=0$ 和 $C(x=1)=10$,组合成如下的整体矩阵

$$(10^{-7})\begin{bmatrix}1.(10^7)&0&0&0&0&0\\0&1.040&-0.415&0&0&0\\0&-0.565&1.040&-0.415&0&0\\0&0&-0.565&1.040&-0.415&0\\0&0&0&-0.565&1.040&0\\0&0&0&0&0&1.(10^7)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\\C_5\\C_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0\\0.0\\0.0\\0.0\\0.415(10^{-6})\\10.0\end{Bmatrix}$$

边界条件为 $C(x=0)=0$ 和 $C(x=L)=C_L$,长度为 L 的区域上的解析解为

$$C=\frac{C_Le^{\alpha(x-L)}\sinh(\beta x)}{\sinh(\beta L)}$$

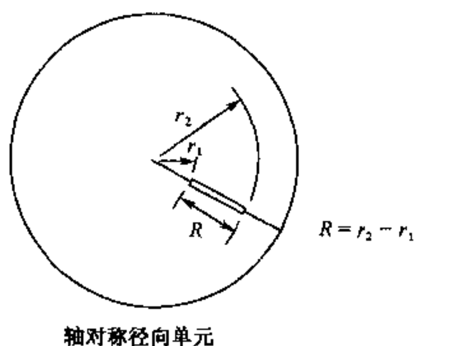
$$\alpha=\frac{u}{2D}\quad 和\quad \beta=\left(\alpha^2+\frac{K_r}{D}\right)^{1/2}$$

表 2.4 是由有限元解和解析解制成的表格.

表 2.4　C 的有限元解和解析解的比较

节点	x	有限元解	解析解
1	0.0	0.0	0.0
2	0.2	0.6392	0.6576
3	0.4	1.6019	1.6383
-4	0.6	3.1442	3.1937
5	0.8	5.6985	5.7446
6	1.0	10.0	10.0

2.19　试求如图 2-7 所示的轴对称同轴悬索的有限元解,并将使用四个线性单元求得的解(悬索的每一段中有两个等长单元)与使用六个线性单元(悬索的每一段中有三个等长单元)求得的解进行对比.假设悬索的内部半径为 $r_a = 5$ mm,外部半径为 $r_c = 25$ mm,交界面的半径为 $r_b = 10$ mm.另外假设本例中悬索内芯和外层的电容率分别为 $\varepsilon_1 = 0.5$和 $\varepsilon_2 = 2.0$,悬索内芯和外层的电荷密度分别为 $\rho_1 = 100$ 和 $\rho_2 = 0$,边界条件为 $\phi_{r=a} = 500$ 和 $\phi_{r=c} = 0$.参看题 2.28,将计算解与真解进行比较.



轴对称径向单元

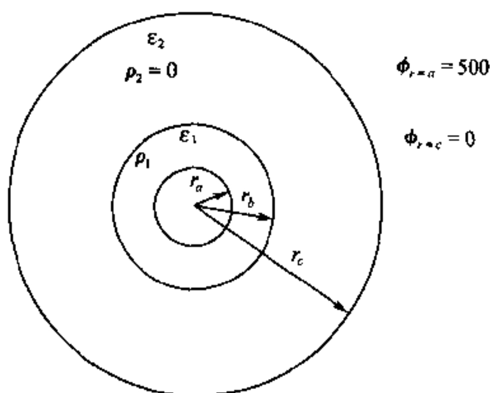


图 2-7　同轴悬索

解　☞ 按照问题 2.9 中所用的方法,将变分函数(2.31)用形函数来表示,并关于 ϕ 取极小化,有

$$\int_{r_1}^{r_2}\left[2\pi r\begin{Bmatrix}-1/R\\1/R\end{Bmatrix}[\varepsilon][-1/R \quad 1/R]\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix} - 2\pi r\rho\begin{Bmatrix}(r_2 - r)/R\\(r - r_1)/R\end{Bmatrix}\right]\mathrm{d}r = 0 \qquad \text{(a)}$$

这里的形状函数为

$$N_1 = \frac{r_2 - r}{R} \quad \text{和} \quad N_2 = \frac{r - r_1}{R}$$

其中 $R = r_2 - r_1$ 为径向单元的长度.上述表达式中积分的上、下限应该与所要构造的单元相对应.与题 2.9 的积分限明显不同,那里的积分限为从 0 到单元的长度 L.当半径增大时,由积分定义的材料的体积增大.完成式(a)中的矩阵乘法以及关于 r 和 r^2 的积分后,得到的单元刚度矩阵为

$$\pi_\epsilon\left\{\frac{r_1+r_2}{R}\right\}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\frac{2\pi\rho}{R}\begin{Bmatrix}r_2^3/6-r_2r_1^2/2+r_1^3/3\\ r_2^3/3-r_1r_2^2/2+r_1^3/6\end{Bmatrix} \tag{b}$$

由方程(b)的右端可以发现,两个节点之间的电荷密度不是均匀的.利用模型方程(b),经计算四个单元的整体刚度矩阵和应力矩阵为

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 18.850 & -10.996 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & -10.996 & 34.034 & -23.038 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & -23.038 & 58.643 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}500.00\\ 15707.962\\ 7199.484\\ 0.0\\ 0.0\end{bmatrix} \tag{c}$$

其真解可以由题 2.28(c)计算得到,将参数代入题 2.28(c),得到求解积分常数的方程:

$$\begin{bmatrix}1.609 & 1.0 & 0.0 & 0.0\\ 2.302 & 1.0 & -2.302 & -1.0\\ 0.05 & 0.0 & -0.20 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 3.219 & 1.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1750.0\\ 5000.0\\ 500.0\\ 0.0\end{bmatrix} \tag{d}$$

方程(d)的解为 $C_1=6009.762$, $C_2=-7919.703$, $C_3=-997.560$, $C_4=3211.147$,将积分常数代入由题 2.28(a)给出的解,得到如表 2.5 所示的解析解.六个单元(七个节点)有限元解的获得方法类似于四个单元有限元解的获得方法,不再给出其具体细节.最终结果如表 2.5 所示.

表 2.5 同轴悬索问题 ϕ 的解之比较

r	四个单元	六个单元	解析解
5.0	500.0	500.0	500.0
6.67	—	1246.54	1259.39
7.50	1347.35	—	1376.88
8.33	—	1333.28	1350.39
10.00	881.17	899.18	918.29
15.00	—	503.04	509.71
17.50	346.17	—	355.93
20.00	—	220.08	222.73
25.00	0.0	0.0	0.0

这里的结果不如先前的有限元算例准确.由一种材料制成的同轴悬索的六个单元的有限元解比相应的四个单元的有限元解准确.材质的变化引起精度的损失.然而,单元个数的微小增加将导致计算精度的迅速提高.本例中的解析解可以用来检验有限元解的精度,并确定有限单元个数的最优值供使用.

2.20 对一维有限元问题的两点线性元形式及三点二次元形式进行比较.

解 ☞ 两点线性元的讨论在题 2.8 和图 2-5 中作了说明.每个单元由两个形状函数组成,其中定义在单元 I 中点 1 处的形状函数在该点处取值为 1,在其他点取值为 0,例如图 2-5(b)所示.上述的单元 I 由两个形状函数的组合所描述.

三点二次元具有相类似的性质.二次函数必须跨越两个区间并连接 3 个节点,这两个区间定义为一个单元.前面的讨论中为便于计算,将两节点单元的长度指定为 L.三节点单元的长度可以为 L、$2L$ 或任意方便于计算的长度.然而在构造单元矩阵时,积分限必须与相应的单元长度相对应.

假设某个一维区间的长度为任意值 a,并采用二个三节点单元来模拟这个区间.如图 2-8 所示,需要将一维区间分为四份,每两个组成一个单元.采用一般的形式定义单元 I 中的函数

$$f_{\mathrm{I}}=N_{\mathrm{I}1}f_1+N_{\mathrm{I}2}f_2+N_{\mathrm{I}3}f_3 \tag{a}$$

类似的,单元 II 中的函数为

$$f_{\mathrm{II}}=N_{\mathrm{II}3}f_3+N_{\mathrm{II}4}f_4+N_{\mathrm{II}5}f_5 \tag{b}$$

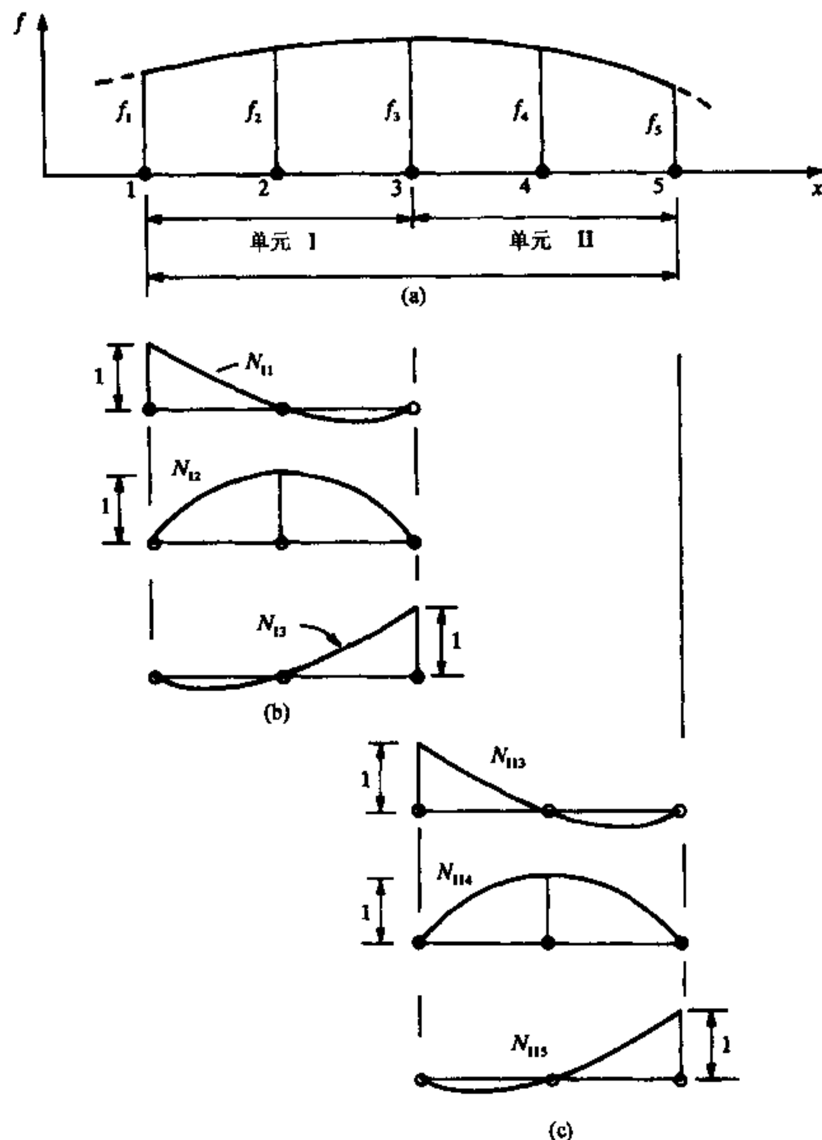


图 2-8

这里的形状函数如图 2-8 所示，它们的形式与图 2-5 中线性元的形式是不同的．很明显，三次插值多项式含有四个节点，一个单元包含三个小区间．

式(a)和(b)的矩阵形式可以写为

$$f_{\mathrm{I}} = [N_{\mathrm{I}1} \quad N_{\mathrm{I}2} \quad N_{\mathrm{I}3}]\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad 和 \quad f_{\mathrm{II}} = [N_{\mathrm{II}3} \quad N_{\mathrm{II}4} \quad N_{\mathrm{II}5}]\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix}$$

或

$$f = [\mathrm{N}]\{f\} \tag{c}$$

每个单元上形状函数的叠加都遵循同样的过程．在这个例证中，节点 3 为连通点．一旦将形状函数按一定的形式写出，构造单元刚度矩阵的过程与前面的所有例子是相同的．形状函数由插值公式近似为

$$f_1 = A + Bx + Cx^2 \quad f_2 = A + Bx + Cx^2 \quad f_3 = A + Bx + Cx^2$$

题 2.4 中使用的方法可用来推导一般的形状函数．然而其代数演算过程将更加繁杂．参见题 2.29．

2.21 采用直接方法推导轴向力作用下直杆拉伸问题的单元刚度矩阵．

解 ☞ 长为 L 的直杆如图 2-9(a)所示．设直杆的右端固定，左端发生了正位移 u_1．由式(2.32)，相应的作用力为

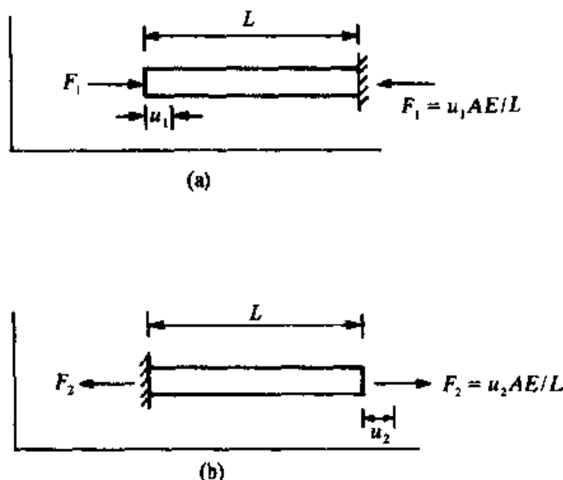


图 2-9　直杆有限单元

$$F_1 = u_1 \frac{AE}{L} \tag{a}$$

为保持平衡，直杆的右端将受到与之相反的作用力，或者

$$F_1 = -u_1 \frac{AE}{L}$$

又如图 2-9(b)所示，设直杆的左端固定，右端发生了正位移 u_2. 则作用于右端的正向力为

$$F_2 = u_2 \frac{AE}{L} \tag{b}$$

类似的，作用于左端的反作用力为 $F_2 = -u_2 AE/L$.

直杆的受力处于平衡状态，这说明作用在直杆两端的力大小相等、方向相反. 假设将图 2-9(a)和图 2-9(b)所示的结果进行叠加，得到一般情况下，直杆受到外部节点力 P 的作用，使其左端发生位移 u_1，右端发生位移 u_2，则相应的结果为

$$\begin{aligned} u_1 \frac{AE}{L} - u_2 \frac{AE}{L} &= P \\ -u_1 \frac{AE}{L} + u_2 \frac{AE}{L} &= P \end{aligned} \tag{c}$$

其矩阵形式为

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \tag{d}$$

上面的方程(d)可与题 2.9 中的式(e)进行比较，上面的应力矩阵表示边界荷载，轴向力施加在静态平衡杆的两端. 题 2.9 中的应力矩阵表示体积力形式的荷载在直杆内部的分布情况. 采用两种不同推导方法得到的单元刚度矩阵是相同的.

补充习题

2.22　设直杆的长度为 L，热源强度为常数 Q，边界条件为 $T(x=0)=T_0$ 和 $q(x=L)=-q_L$（向外散热），试求解方程(2.11).

2.23　设函数 $T(\theta)$ 在极坐标系下的径向坐标为常数，弧长度为 $\alpha=\theta_2-\theta_1$，试推导其线性插值多项式.

2.24　设 $T=C\sin(\pi x/L)$，这里 C 为常数，试用 Rayleigh-Ritz 方法求解题 2.3.

2.25　设悬索竖向位移问题 2.12 的计算区域被 11 个节点分为 10 个单元，试求其节点处的解，并与题 2.1 给出的真解进行比较.

2.26　设质量输移题 2.18 的计算区域被 11 个节点分为 10 个单元，试求其节点处的解.

2.27　证明可以由变分函数(2.31)推得控制微分方程(2.29).

2.28　参照图 2-7 和方程(2.30)，求同轴悬索问题的一般解.

(a) 建立悬索在每个截面处的控制微分方程并解微分方程.

(b) 建立边界条件和连续性条件.

(c) 用能够求解积分常数的矩阵方程表示(b)中的方程.

2.29 如图 2-10 所示,推导关于 x_1、x_2 和 x_3 的三点二次元的形状函数.

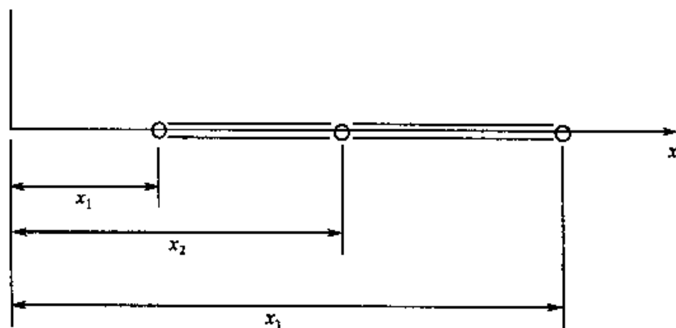


图 2-10 三点单元

2.30 参照题 2.29 和图 2-10,设 $x_1=-L$、$x_2=0$ 和 $x_3=L$,求相应的形状函数.

2.31 参照题 2.30,对长为 $2L$、坐标为$(-L,0,L)$的单元,推导其单元刚度矩阵.见题 2.9.

2.32 利用题 2.30 定义的长为 $2L$ 的三点单元,推导定义各点体积力分布的应力矩阵.见题 2.9 和 2.19.

补充习题答案

2.22 $T(x)=Q(xL-x^2/2)/k-q_Lx/k+T_0$.

2.23 $T=(\theta_2-\theta)T_1/\alpha+(\theta-\theta_1)T_2/\alpha$.

2.24 $T=(4QL^2/\pi^3k)\sin(\pi x/L)$;在 $x=L/2$ 处,$T=0.129QL^2/k$,而真解为 $T=0.125QL^2/k$.

2.25

悬索竖向位移			
节点	x	有限元解	真解
1	0	0.0	0.0
2	12	1.0913	1.0853
3	24	1.8264	1.8173
4	36	2.2953	2.2848
5	48	2.5555	2.5444
6	60	2.6389	2.6276

2.26

质量输移			
节点	x	有限元解	真解
1	0.0	0.0	0.0
2	0.1	0.2975	0.2997
3	0.2	0.6531	0.6576
4	0.3	1.0881	1.0948
5	0.4	1.6294	1.6383
6	0.5	2.3121	2.3229
7	0.6	3.1816	3.1937
8	0.7	4.2965	4.3090
9	0.8	5.7333	5.7446
10	0.9	7.5914	7.5990
11	1.0	10.0	10.0

2.28　(a)

$$\frac{\varepsilon_1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}r}\right)\right]=-\rho_1\quad a\leqslant r\leqslant b$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}r}=-\frac{\rho_1 r^3}{2\varepsilon_1}+\frac{C_1}{r}$$

$$\phi_1=-\frac{\rho_1 r^2}{4\varepsilon_1}+C_1\ln r+C_2$$

和

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{r}\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}r}\right)\right]=0\quad b\leqslant r\leqslant c$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}r}=\frac{C_3}{r}$$

$$\phi_2=C_3\ln r+C_4$$

(b)

$$\phi_1(r=a)=\phi_a\quad 或\quad \phi_a=\frac{-\rho_1 a^2}{4\varepsilon_1}+C_1\ln a+C_2$$

$$\phi_2(r=c)=0\quad 或\quad 0=C_3\ln c+C_4$$

电势在 $r=b$ 处连续，或

$$\frac{-\rho_1 b^2}{4\varepsilon_1}+C_1\ln b+C_2=C_3\ln b+C_4$$

电位移在 $r=b$ 处连续，或

$$\varepsilon_1\left[\frac{-\rho_1 b}{2\varepsilon_1}+\frac{C_1}{b}\right]=\frac{\varepsilon_2 C_3}{b}$$

(c)

$$\begin{bmatrix}\ln a & 1 & 0 & 0\\ \ln b & 1 & -\ln b & -1\\ \varepsilon_1/b & 0 & -\varepsilon_2/b & 0\\ 0 & 0 & \ln c & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_a+\rho_1 a^2/4\varepsilon_1\\ \rho_1 b^2/4\varepsilon_1\\ \rho_1 b/2\\ 0\end{Bmatrix}$$

2.29

$$N_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$N_2=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$N_3=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

2.30　$N_1=(x^2-xL)/2L^2, N_2=(L^2-x^2)/L^2, N_3=(x^2+xL)/2L^2$.

2.31

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$

2.32　结点 1 的分布 $=AfL/3$，结点 2 的分布 $=4AfL/3$，结点 3 的分布 $=AfL/3$. 注意结点分布相加后得 $2AfL/3$，为单元上的全部作用力.

第三章　二维有限元分析

3.1　引言

在这一章中将把第二章中一维概念推广到二维.将控制各种工程原理的微分方程写成二维的一般形式.另外,对控制弹性理论中二维问题的方程进行推导.

对两个基本有限单元进行讨论.四结点的四边形单元和三结点的三角形单元是计算中被使用的最基本的二维单元.然而,用这两种单元可以建立任何二维物理问题的模型.本章中的四边形单元是矩形的,并且符合笛卡儿全局坐标系.三角形单元用来模拟具有曲边界的二维问题,其中的曲线是用一条折线来逼近.这两种单元都可以扩展到如轴对称问题的特殊情形.对非轴对称情形,四结点单元可用柱坐标来表达,但是每个单元必须符合柱坐标系.

第二章中的变分函数有其二维形式.此外,如同在第二章讨论的那样,对问题的变分叙述将是发展二维有限元的基础.

本章的结尾还包含一个关于转换矩阵的简短讨论.有两类转换:一个关于弹性力学二维边界条件的应用,另一个是对一个单元的节点或自由度进行重新编号或排列的一般变换.

3.2　二维边值问题

第二章中描述的各种问题可以扩展到二维,且除了式(2.18)以外,都可以写成如下的一般形式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha_x \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha_y \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\right]+\beta\phi(x,y)=f(x,y) \tag{3.1}$$

其中 α_x, α_y 和 β 是已知参数,比如像材料常数,并且一般地它们都是 x, y 的函数.但是,这些参数都被假设成在一个单元内是不变的,任何全局上的变化都被模拟成单元之间的变化.关于钢索挠度的二维对应可以看作一个有弹性的薄膜的挠度,并且 $\alpha_x=\alpha_y=T$,为薄膜张力,$\beta=-k$,为弹性基础模量,式(3.1)中 f 取作 $-f$,为沿变形方向 w 并垂直于薄膜的压力.

二维质量传输方程相似于式(2.18),为

$$u_x\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}+u_y\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left[D_x\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[D_y\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}\right]+K_rC(x,y)=m \tag{3.2}$$

其中 u_x, u_y, D_x 和 D_y 分别为在 x 和 y 方向上的速度和扩散系数.

3.3　连通性和节点坐标

三节点和四节点单元的节点编号如图3-1所示.节点编号是为了导出局部刚度矩阵,并且总是使用从1开始的连续数.而且在所有有限元分析的实际计算中,采用逆时针方向对节点编号.对于本章中矩形局部单元应从有最小的 x 和 y 坐标值处开始编号.对于具有边中点和内部节点的高阶单元的编号顺序没有标准的方法;角节点可以首先被编号,然后边中点,或者所有的节点按顺序编号.不管顺序如何,编号过程应总是逆时针的.有限元模型就是原型的一个几何图像,其中的节点都必须有其自身的标识符(节点数)和对应此标识符的坐标位置.模型中的每一个单元也必须有它的标识符(单元数)和一个连通数组.在计算机程序中通常有两个数组用来描述模型的几何图形,节点坐标和连通性.在二维问题中节点坐标数组有 $N_{\text{node}}\times 2$ 的维数,其中 N_{node}是节点数.连通数组与上一章讨论的相同,其维数为 $N_{\text{el}}\times N_{\text{node}}$.在实际应用中,连通数组还可以包含其他的信息,例如像材料标识.因为被模拟的原型中可能含有一种或多种材料,如同题2.19那样,这样每一个单元都需要一个材料标识符(材料数).

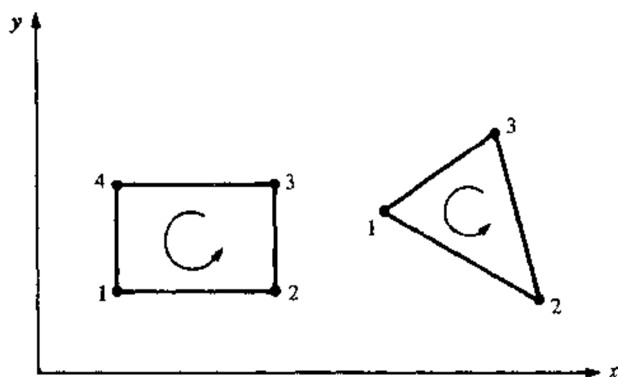


图 3-1　逆时针方向的节点数

3.4　弹性理论

有限元法已经被大量地用于求解二维弹性方程.弹性问题可以用位移表示成公式,并且所有的有限单元节点都必须有两个自由度以便表示在每个坐标方向上的位移.第二章中的其他问题(温度分布,质量传输等等)都可归类为标量场问题,而且无论是一维还是二维,每个单元中只有一个未知量.无论是一维的钢索还是二维薄膜的挠度都可以表示成位移的公式.本书中的位移是一个矢量,因为它既有大小又有方向.但是位移矢量只有一个分量,它的方向在解问题之前就确定了.由此得到,关于一个标量的有限元公式和关于只有一个分量的矢量的有限元公式是相同的.由于标量场问题中基本变量的一阶导数是有方向性的,这就意味着在二维和三维情形中,一阶导数是矢量.虽然一维中的一阶导数是有方向的,但由于它的方向是已知的,因此对它不需要有特别的考虑.

二维弹性问题中矢量位移具有两个分量,它的一阶导数对应各种应变,并且应变与应力成线性关系.应力与应变是二阶张量,因此具有某些数学和几何上的性质.这就意味着本章将包含更多的弹性问题公式化的推导,而只包含少量的标量问题的公式化推导.但是上面的推导还是遵循第二章建立起来的基本概念.

二维弹性理论中的应变-位移方程把 x 和 y 坐标方向上的位移 u 和 v 与相应的应变联系起来:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.3}$$

法向应变 ε_{xx} 和 ε_{yy} 定义了在 x 和 y 方向上每单位长度的挠度.切向应变 ε_{xy} 定义了一个质点的相对角变形.由式(3.3)给出的定义被看作是工程上的应变定义.守恒方程定义了一个质点上的力的平衡.本章中不直接使用它们推导有限元的公式,但是当试图求分析解时它们必须被满足.这些方程定义了法应力、切应力和体积力的关系:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+f_x=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+f_y=0 \tag{3.5}$$

基本的关系是胡克定律,并且一般地它表示每个应力分量与每个应变分量有关.本章中假设弹性材料是均匀的且各向同性,那么由此得到,借助工程常数、杨模数 E 和泊松系数 ν,所有应力和应变分量都是有关的.经常假设笛卡儿坐标系中的二维问题包含平面应力和平面应变.

平面应力出现在厚度尺寸相比于长度和宽度尺寸很小时的情况,并简单地假设法向(z 轴)上的应力为零.平面上薄板或物质圆盘就是平面应力的例子.应力应变关系为

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy}) \tag{3.6}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{xx}) \tag{3.7}$$

$$\sigma_{xy}=G\varepsilon_{xy}=\frac{E}{2(1+v)}\varepsilon_{xy} \tag{3.8}$$

其中 G 是剪切模数,并可由 E 和 v 计算

$$G=\frac{E}{2(1+v)} \tag{3.9}$$

当一物体的长度相比横截面很大时,如枪管、就可以假设平面应变,一个适当的假设是位移和$\partial/\partial z$ 在 z 向上为零.由此得到平面应变的应力应变关系为

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy}] \tag{3.10}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{xx}] \tag{3.11}$$

$$\sigma_{zz}=v(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \tag{3.12}$$

且切应力和切应变的关系与式(3.8)相同.

3.5 变分函数

接着前一章的方法使用变分函数可以推得二维问题有限元.但是前提是控制微分方程的变分函数存在.二维问题的变分函数可以作为一维函数的扩展来得到,如同二维控制方程是一维对应方程的扩展一样.换句话说如果变分函数在一维中是存在的话,那么它在二维和三维中也存在.

使用笛卡儿张量记号,由应力和应变张量可将对应平面弹性问题的变分函数写成一般形式:

$$J(u)=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{kj}\varepsilon_{kj}-f_ku_k\right)\mathrm{d}V-\int_S T_ku_k\mathrm{d}S \tag{3.13}$$

3.6 三角单元与面积坐标

在本章中将使用四节点的矩形单元详细推导有限元概念.在分析应用中三节点的三角单元可能是更为流行的单元.四节点的矩形单元的明显局限性是它必须用在能用矩形逼近的情形,而三节点单元可以用来逼近任何形状.相比高阶单元而言,这两种单元都是低级的.但是从教学的观点来看,显然它们是起点.对矩形单元的面积积分是基本的,这就是在推导局部有限元刚度矩阵时强调这些单元的基本原因.

学习完第二章,读者应该意识到形状函数的导数在有限元中占有重要位置.三节点的三角单元关于 x 和 y 都是线性的,而四节点的矩形单元含有 x 和 y 的乘积项.对三节点单元的一阶导数是常量,并且单元常称作常应变三角形(CSTs).更恰当地应称之为常梯度三角形,但是这个命名来自于弹性原理中的早期应用并且已成为标准.四节点单元的形状函数的一阶导数是 x 或 y 的函数.

对三节点单元的面积积分看起来是简单的,因为一阶导数是常数所以面积积分简化成计算相应三角形的面积.经常使用面积坐标来导出一个三角单元的刚度矩阵,并且用特殊类型的数值积分来计算面积积分;尽管如此,推导刚度矩阵可能仍然有些困难.对三角单元,面积坐标和它们的数值积分将在基本的变分函数用矩阵形式展开之后加以讨论,并使用矩形单元加以说明.一旦变分函数写成矩阵形式并被极小化,那么它就可用来导出任何的有限元,因为形状函数实际上定义了导出刚度矩阵的过程.

3.7 变换

矩阵变换就是根据某些约束或条件来对一个矩阵进行修改的计算机操作.要修改的矩阵

经常是刚度矩阵.但是在某些情况下,用机器运算改变刚度矩阵也是有效的.在这部分的讨论中,将给出两类矩阵变换.第一个是以标准矢量变换为基础的,如图 3-2 所示,第二个是用来当局部有限元公式形成后节点编号顺序必须改变时修改局部刚度矩阵的.此种情形在后面的章节经常出现.

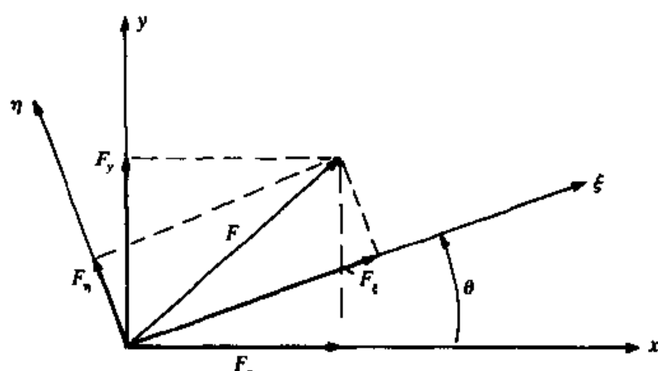


图 3-2　矢量变换

由图 3-2 定义的矢量变换可以用来用 F 在 x, y 坐标系中分量表示其在 ξ, η 坐标下的矢量分量:

$$\begin{Bmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = [\mathrm{T}] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

其中[T]是变换矩阵.矢量可以定义力,位移,或其他任何向量.对有限元计算中的许多应用,变换都是从 ξ, η 系到局部的 x, y 系统

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{Bmatrix} = [\mathrm{T}]^T \begin{Bmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

3.8　柱坐标

在 r, θ, z 柱坐标系中对应式(3.1)的三维方程可以写成一般形式.虽然给出了三维方程但是在下面的应用问题中将要使用其二维形式.物质常数被看作是独立于坐标系的,此外,在有限元的公式化过程中将包括所有的空间相关.

$$\alpha_r\left[\frac{\partial^2\phi(r,\theta,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi(r,\theta,z)}{\partial r}\right] + \alpha_\theta \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi(r,\theta,z)}{\partial\theta^2}$$

$$+ \alpha_z \frac{\partial^2\phi(r,\theta,z)}{\partial z^2} + \beta\phi(r,\theta,z) = f(r,\theta,z) \tag{3.16}$$

令 u, v 和 w 分别是 r, θ, z 方向上的位移,则柱坐标系中弹性理论的三维应变-位移方程为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} \tag{3.17}$$

特别地,式(3.17)中的剪切应变是应变的工程定义.使用 r, z 坐标或 r, θ 坐标可由三维定义导出二维定义.各向同性弹性体的三维应力-应变方程相似于平面应变方程:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{rr} + v(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{\theta\theta} + v(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})]$$

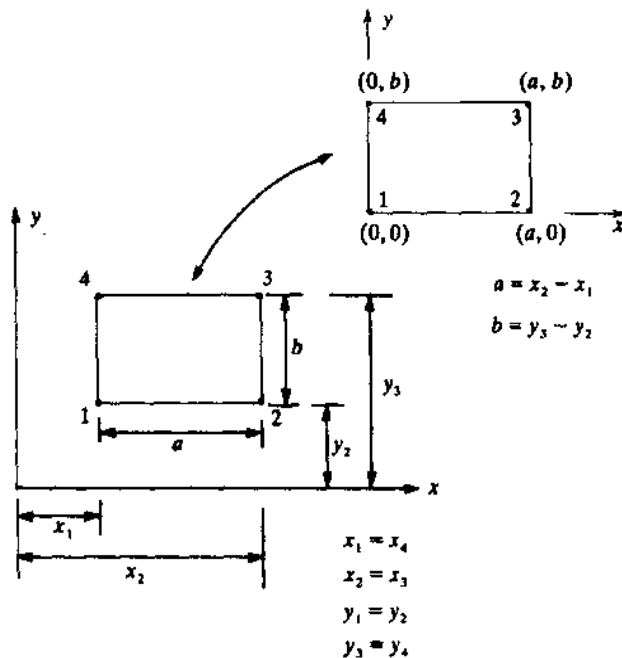
$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{zz} + v(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr})]$$

$$\sigma_{r\theta} = G\varepsilon_{r\theta} \quad \sigma_{rz} = G\varepsilon_{rz} \quad \sigma_{\theta z} = G\varepsilon_{\theta z} \tag{3.18}$$

例题详解

3.1　在图 3-3 中定义了一个 $a \times b$ 大小的矩形单元. 设一个有如下形式的函数

$$\phi = A + Bx + Cy + Dxy \tag{a}$$



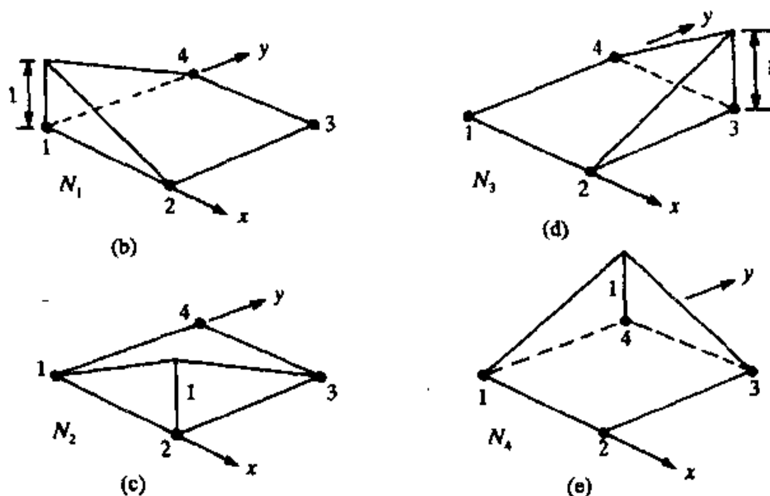


图 3-3　矩形四节点有限元

解　☞ 推导矩形单元的形状函数. 用下面的形式写出最终结果

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4 \tag{b}$$

如图 3-3 所示, 单元的边界条件为

$$\phi(0,0) = \phi_1 \quad \phi(a,0) = \phi_2 \quad \phi(a,b) = \phi_3 \quad \phi(0,b) = \phi_4 \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)得到四个含有未知常数的方程:

$$\phi_1 = A \qquad \phi_2 = A + Ba$$

$$\phi_3 = A + Ba + Cb + Dab \quad \phi_4 = A + Cb$$

得到

$$A = \phi_1 \quad B = \frac{\phi_2 - \phi_1}{a} \quad C = \frac{\phi_4 - \phi_1}{b} \quad D = \frac{\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4}{ab} \tag{d}$$

将式(d)代入式(a)并重新组合成式(b)的形式.则形状函数可以写为

$$N_1 = \frac{(a - x)(b - y)}{ab} \quad N_2 = \frac{x(b - y)}{ab}$$
$$N_3 = \frac{xy}{ab} \qquad N_4 = \frac{y(a - x)}{ab} \tag{e}$$

节点 1 的形状函数在节点 1 处等于 1,在其他的节点处等于 0.所有的形状函数都有此性质,如图 3-3 中演示

3.2 在图 3-4 中定义了一个 x, y 坐标系中的一个三节点的三角单元,三节点为 1,2 和 3,分别坐落在全局系统的(x_1, y_1),(x_2, y_2)和(x_3, y_3)上.根据全局坐标推导形状函数.

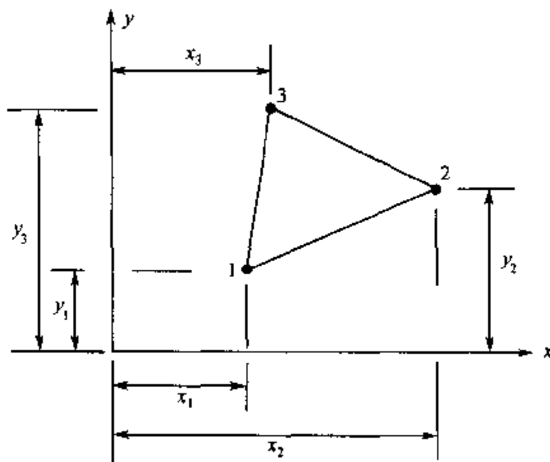


图 3-4

解 ☞ 假设用一个插值函数来表示未知量的变化

$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 y \tag{a}$$

将插值函数写成矩阵方程

$$\phi = [1 \quad x \quad y]\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad \text{或矩阵形式} \quad \phi = [\alpha]\{C\} \tag{b}$$

边界条件是用 ϕ 在节点处的值来表示

$$\phi(x_1, y_1) = \phi_1 \quad \phi(x_2, y_2) = \phi_2 \quad \phi(x_3, y_3) = \phi_3 \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)则得到可以解出 C_1, C_2 和 C_3 的三个方程:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= C_1 + C_2 x_1 + C_3 y_1 \\ \phi_2 &= C_1 + C_2 x_2 + C_3 y_2 \\ \phi_3 &= C_1 + C_2 x_3 + C_3 y_3 \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

将式(d)写成矩阵形式为

$$\{\phi\} = [X]\{C\} \tag{e}$$

并解得$\{C\}$为

$$\{C\} = [X]^{-1}\{\phi\} \tag{f}$$

将式(f)代入式(b):

$$\phi = [\alpha][X]^{-1}\{\phi\} = [N]\{\phi\} \tag{g}$$

形状函数就是式(g)右侧前两个矩阵的积.

$$[N] = [\alpha][X]^{-1} \quad \text{或} \quad [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 \quad x \quad y][X]^{-1} \tag{h}$$

解式(h)得(见题 3.30)

$$\begin{aligned} N_1 &= [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)]/2A \\ N_2 &= [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)]/2A \\ N_3 &= [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)]/2A \end{aligned} \tag{i}$$

其中

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix} \tag{j}$$

A 是三角单元得面积.

3.3 图 3-5 显示一个 x, y 坐标系中的四边单元.节点坐落在如图所示的坐标点上,并且在每个坐标点上的温度分布是已知的,为 $T_1 = 100°$, $T_2 = 60°$, $T_3 = 50°$和 $T_4 = 90°$.使用在题 3.1 中导出的形状函数计算在 $x = 2.5$ 和 $y = 2.5$ 处的温度.

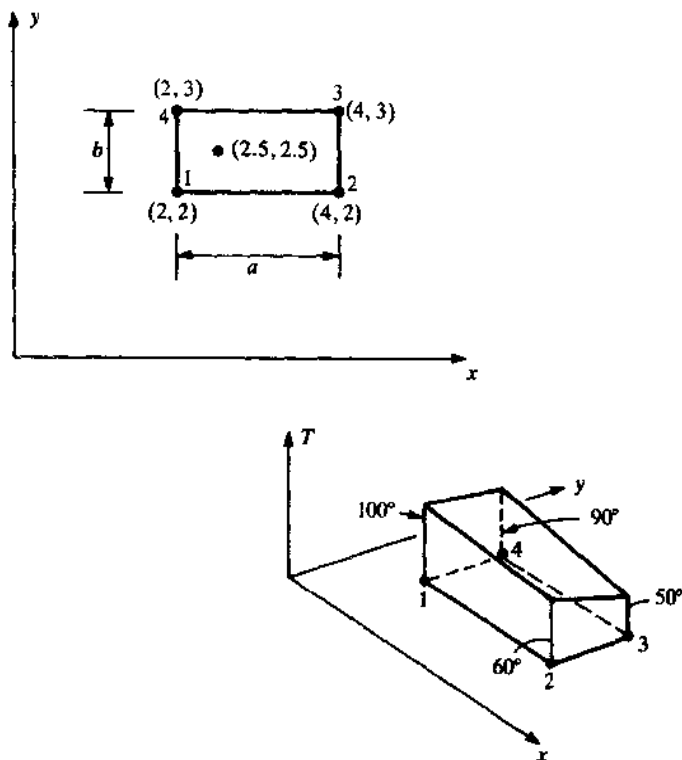


图 3-5

解 使用题 3.1 中的式(b)和式(c).注意 $a = 2.0$ 和 $b = 2.0$ 且点(2.5,2.5)位置是在单元内的 $(a/4, b/2)$处.计算出的形状函数为

$$N_1 = \frac{(a - a/4)(b - b/2)}{ab} = \frac{3}{8} \quad N_2 = \frac{(a/4)(b - b/2)}{ab} = \frac{1}{8}$$

$$N_3 = \frac{(a/4)(b/2)}{ab} = \frac{1}{8} \quad N_4 = \frac{(a - a/4)(b/2)}{ab} = \frac{3}{8}$$

计算出的温度为

$$T(2.5, 2.5) = \frac{3}{8}(100) + \frac{1}{8}(60) + \frac{1}{8}(50) + \frac{3}{8}(90) = 85°$$

3.4 推导对应二维热传导的变分函数.用四节点线性形状函数表示变分函数,并且写出其对应的一般的矩阵形式.

解 使用式(2.23)扩展一维函数到二维情形:

$$J(T) = \int_A \left[\frac{k_x}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{k_y}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 - QT\right] t\,dx\,dy \tag{a}$$

这里假设了均匀厚度 t,热传导率 k_x 和 k_y 在 x 和 y 方向上可以有不同的值.表示在一个单元中温度分布的形状函数具有题 3.1 中式(b)的形式,用矩阵形式温度表示为

$$T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = [N]\{T\} \tag{b}$$

其中只有形状函数是 x 和 y 的函数.定义表达式(a)中偏导数的算子矩阵:

$$[L_x] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right] \quad 和 \quad [L_y] = \left[\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{c}$$

令$[L_x]$对$[N]$运算或$[L_x][N]$,则结果是 1×1 矩阵乘以 1×4 矩阵,得到一个 1×4 矩阵,它定义了形状函数对 x 的偏导数.同样,$[L_y][N]$也是一个 1×4 矩阵,它定义了形状函数对 y 的偏导数.为了演算,将 k_x 和 k_y 都表示成 1×1 矩阵.现在(a)可以写成矩阵方程

$$J(T) = \int_A\Big(\frac{1}{2}\{T\}^T[N]^T[L_x]^T[k_x][L_x][N]\{T\}$$
$$+\frac{1}{2}\{T\}^T[N]^T[L_y]^T[k_y][L_y][N]\{T\} - \{T\}^T[N]^TQ\Big)t\,dx\,dy \tag{d}$$

所有的矩阵项相乘之后,其结果是一个 1×1 矩阵且表示数量.此函数可以对$\{T\}$求最小.式中前两项导致两个能相加的 4×4 矩阵.最后一项应是一个反映 Q 在每个节点分布的 4×1 矩阵.式(d)的形成说明了有限元公式的构造过程.但是计算中需要一个更紧凑的形式.不用分别定义$[L_x]$和$[L_y]$,而定义一个算子矩阵

$$[L] = \begin{bmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y\end{bmatrix}$$

并可用一个矩阵定义$[L]$作用在$[N]$上的偏导数

$$[L][N] = \begin{bmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y\end{bmatrix}[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$
$$= \begin{bmatrix}\partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial x \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y & \partial N_4/\partial y\end{bmatrix} \tag{e}$$

式(e)中的最后一项通常称作 B 矩阵.通过定义一个热传导矩阵,变分函数可以写成更紧凑的形式

$$[k] = \begin{bmatrix}k_x & 0 \\ 0 & k_y\end{bmatrix}$$

且

$$J(T) = \int_A\Big(\frac{1}{2}\{T\}^T[N]^T[L]^T[k][L][N]\{T\} - \{T\}^T[N]^TQ\Big)t\,dx\,dy$$

或

$$J(T) = \int_A\Big(\frac{1}{2}\{T\}^T[B]^T[k][B]\{T\} - \{T\}^T[N]^TQ\Big)t\,dx\,dy \tag{f}$$

式(f)为变分函数等价的矩阵表述.

3.5 使用四节点四边单元的形状函数推导热传导问题的一个局部刚度矩阵.

解 ☞ 如同题 3.4 中的式(f),将变分函数写成矩阵形式,并求其关于未知量$\{T\}$的最小值.得到

$$\int_A[B]^T[k][B]\{T\}t\,dx\,dy = \int_A[N]^TQt\,dx\,dy \tag{a}$$

式(a)左边前三个矩阵相乘后得到一个 4×4 的局部刚度矩阵.将局部刚度矩阵定义为

$$[K] = \int_A[B]^T[k][B]t\,dx\,dy \tag{b}$$

例如局部刚度矩阵的第一项就呈现为

$$K_{11} = \int_0^a\int_0^b\Big(\frac{\partial N_1}{\partial x}k_x\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y}k_y\frac{\partial N_1}{\partial y}\Big)t\,dx\,dy \tag{c}$$

试图计算积分之前,需要知道形状函数的导数,下面列出了这些导数以供参考.请参阅题 3.1 中的式(e).

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{-(b-y)}{ab} \quad &\frac{\partial N_1}{\partial y}=\frac{-(a-x)}{ab}\\
&\frac{\partial N_2}{\partial x}=\frac{b-y}{ab} \quad &\frac{\partial N_2}{\partial y}=\frac{-x}{ab}\\
&\frac{\partial N_3}{\partial x}=\frac{y}{ab} \quad &\frac{\partial N_3}{\partial y}=\frac{x}{ab}\\
&\frac{\partial N_4}{\partial x}=\frac{-y}{ab} \quad &\frac{\partial N_4}{\partial y}=\frac{a-x}{ab}
\end{aligned} \tag{d}$$

例如,将适当的导数代入到式(c),就得到刚度矩阵的第一项:

$$K_{11}=\int_0^a\int_0^b\frac{1}{a^2b^2}[(b-y)^2k_x+(a-x)^2k_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分并代入上下限得到

$$K_{11}=\frac{(b^2k_x+a^2k_y)t}{3ab}$$

用同样的方式可计算刚度矩阵的其余各项.则刚度矩阵的形式如下,作为一个练习读者可证明这个结果.

$$[K]=\frac{1}{6ab}\begin{bmatrix}2b^2k_x+2a^2k_y & -2b^2k_x+a^2k_y & -b^2k_x-a^2k_y & b^2k_x-2a^2k_y\\ & 2b^2k_x+a^2k_y & b^2k_x-a^2k_y & -b^2k_x-a^2k_y\\ & \text{对称} & 2b^2k_x+2a^2k_y & -2b^2k_x+a^2k_y\\ & & & 2b^2k_x+2a^2k_y\end{bmatrix} \tag{e}$$

局部刚度矩阵是对称的,并且矩阵中某些项重复出现的.例如所有的对角元素都是相同的.式(a)的右端项表示热源项的分布.

$$\int_0^a\int_0^b\frac{t}{ab}\begin{Bmatrix}(a-x)(b-y)\\ x(b-y)\\ xy\\ y(a-x)\end{Bmatrix}Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{Bmatrix}ab/4\\ ab/4\\ ab/4\\ ab/4\end{Bmatrix}tQ \tag{f}$$

热源在四个节点上式均匀分布的.

3.6　计算图3-6所示平板上稳定状态下的温度分布.沿着 $y=W$ 的边上得到一恒定温度 $T_0=100$,并且其他边上的温度都为0.为便于计算,假设热传导率 $k_x=k_y=1$.比较数值结果与精确解.假设 $W=L=1$,且由于解与 t 无关所以可令 $t=1$.

解 ☞ 当 $k_x=k_y$ 时,控制微分方程就是Laplace方程,并可用分离变量法来求分析解.本例中Laplace方程为

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}=0$$

在条件 $T(0,y)=T(x,0)=T(L,y)=0$ 和 $T(x,W)=T_0=100$ 下,解为

$$T=T_0\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{a}$$

由式(a)给出的级数解中的三项($n=1,3,5$)得到下面的结果:$T(0.5,0.5)=25.0$, $T(0.5,0.5)=9.54$ 和 $T(0.5,0.5)=54.12$.将上述三个结果与一个两单元的解和一个四单元的解进行比较.如图3-6(b)所示的金属平板说明了在二维问题中使用对称性的情况.沿节点2,3和5的金属板中心是一个对称轴;在整个金属板的四单元公式的形成与两单元完全一样.在两单元的公式化中,除了节点3外所有节点都是边界点,且只有一个未知量.节点3处的解为 $T_3=37.50$.它可与分析解 $T(0.5,0.5)$ 相比.

图3-6(c)显示了半金属板分成四单元的情况,此外再次沿金属板中心利用对称性的优势.在公式化中有三个未知量且解的过程与两单元的情形相同.计算得最终结果为 $T_3=27.81$, $T_7=9.73$ 和 $T_9=69.74$,并也可与分析解相比.在金属板内任意坐标点处的温度均可由题3.3所述方法计算得到.由于没有热源项,因此关于此稳定状态问题的解是与热传导率无关.因为在矩阵公式化过程中它必须具有非零值,故将它们设成1.0.

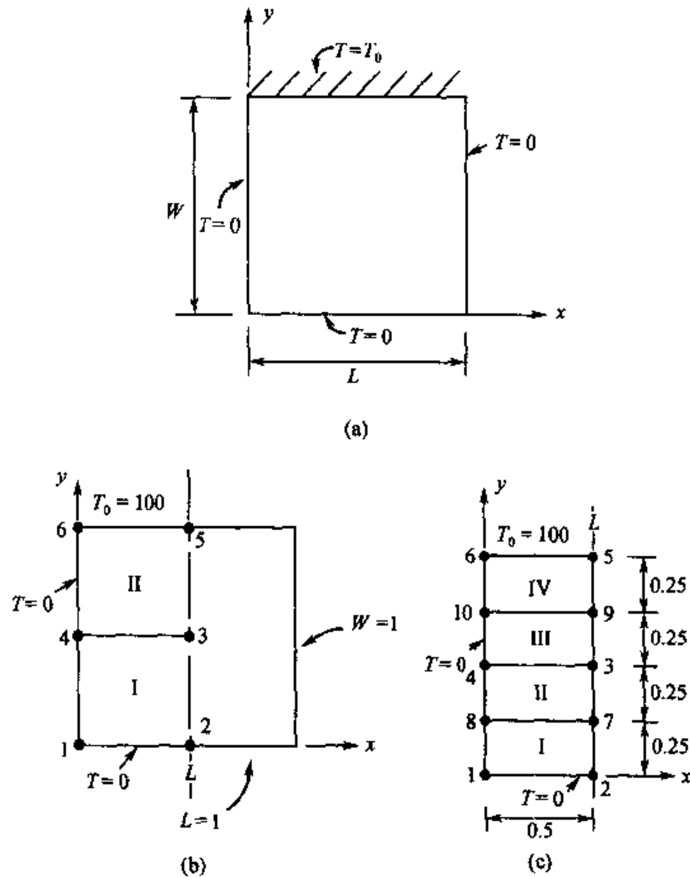


图 3-6

3.7　构造题 3.6 中所用有限元模型的节点坐标和单元连通性数组. 构造对应的刚度矩阵.

解　☞ 首先分析两单元模型. 节点坐标数组和连通性数组(图 3-6)分别由表 3.1 和 3.2 所示.

表 3.1

节点	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.5	0.0
3	0.5	0.5
4	0.0	0.5
5	0.5	1.0
6	0.0	1.0

表 3.2

整体单元	局部单元			
	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4
Ⅰ	1	2	3	4
Ⅱ	4	3	5	6

当 $a=b=0.50$ 时，两单元模型的局部单元是相等的. 将其代入到题 3.5 的式(e)得到局部刚度矩阵：

$$[K]=\begin{bmatrix} 0.667 & -0.167 & -0.333 & -0.167 \\ -0.167 & 0.667 & -0.167 & -0.333 \\ -0.333 & -0.167 & 0.667 & -0.167 \\ -0.167 & -0.333 & -0.167 & 0.667 \end{bmatrix}$$

根据连通数组合并两个局部刚度矩阵. 边界条件是全部的基本类型(T 的特殊值)，并且初始时强迫矩阵为 0. 整体刚度矩阵是 6×6 的，读者可以证明两个局部刚度矩阵合并后得到

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.667 & -0.167 & -0.333 & -0.167 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & 0.667 & -0.167 & -0.333 & 0.000 & 0.000 \\ -0.333 & -0.167 & 1.333 & -0.333 & -0.167 & -0.333 \\ -0.167 & -0.333 & -0.333 & 1.333 & -0.333 & -0.167 \\ 0.000 & 0.000 & -0.167 & -0.333 & 0.667 & -0.167 \\ 0.000 & 0.000 & -0.333 & -0.167 & -0.167 & 0.667 \end{bmatrix} \end{array}$$

矩阵顶端的数值对应图 3-6(b)中的节点. 节点 3 和 4 对两个单元有贡献，而其他节点只对一个单元有贡献.

将非零边界条件代入到矩阵方程的步骤已在题 2.13 中说明. 应用同样的方法可由整体刚度矩阵导出下面的矩阵方程. 此外，读者应证明此结果.

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.333 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 50 \\ 0.0 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

此方程组的解与题 3.6 得到的解是一致的.

将金属板分成四个单元将使节点数增加到 10 个. 图 3-6 所示的节点编号不是最好的节点编号方案，但是它使用了与两单元模型相同的编号. 一个更为随意的节点编号能更好地说明连通性. 节点坐标和连通数组分别由表 3.3 和 3.4 给出. 此外所有的局部刚度矩阵都是相同的. 当 $a=0.5$ 和 $b=0.25$ 时，它们被计算为

表 3.3

节点	X	Y
1	0.00	0.00
2	0.50	0.00
3	0.50	0.50
4	0.00	0.50
5	0.50	1.00
6	0.00	1.00
7	0.50	0.25
8	0.00	0.25
9	0.50	0.75
10	0.00	0.75

表 3.4

整体单元	局部单元			
	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4
Ⅰ	1	2	7	8
Ⅱ	8	7	3	4
Ⅲ	4	3	9	10
Ⅳ	10	9	5	6

$$[K]=\begin{bmatrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.4167 & -0.5833 \\ 0.1667 & 0.8333 & -0.5833 & 0.4167 \\ -0.4167 & -0.5833 & 0.8333 & 0.1667 \\ -0.5833 & -0.4167 & 0.1667 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

整体刚度矩阵将是 10×10 的. 连通数组和图 3-6(c)显示节点 3,4 和 7-10 将对两个单元做贡献. 在代入边界条件之前,整体刚度矩阵是对称矩阵.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8333 & 0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4167 & -0.5833 & 0.0000 & 0.0000 \\ & 0.8333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5833 & -0.4167 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & 1.6667 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & 1.6667 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & & & 0.8333 & 0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & & & 0.8333 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & & & & & 1.6667 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & & & & & & 1.6667 & 0.0000 & 0.0000 \\ & & & & & & & & 1.6667 & 0.3333 \\ & & & & & & & & & 1.6667 \end{bmatrix}$$

矩阵顶端的数值对应节点数. 边界条件的代入与前面解的方法相同,故不再说明. 读者可以证明边界条件将矩阵简化至三个未知量,并且与题 3.6 的温度结果一致.

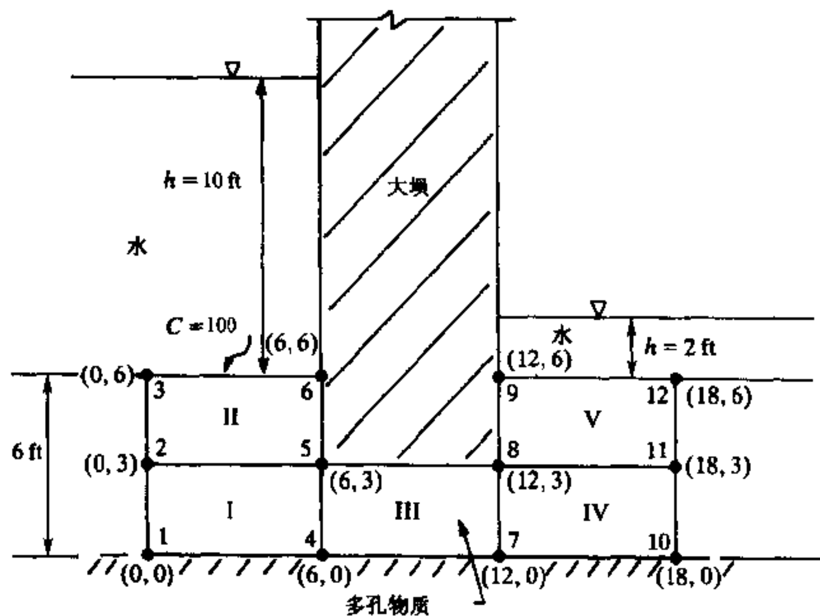


图 3-7　约束流

3.8　用公式表示图 3-7 所示的约束流情形并获得一其有限元解. 上游 10 in 深的水和下游 2 in深的水被一个插入某多孔物质 3 in 的大坝隔开. 假设物质是均匀的并具有水力传导

率 $K=10(10^{-5})$. 另外，在上游处存在浓度为 100×10^{-6}的化学元素. 元素将在多孔介质中以扩散常数 $D_x=D_y=10(10^{-4})$进行扩散，并且以比率常数 $K_r=20(10^{-6})$进行化学反应. 计算考虑(a)定态扩散下，(b)具有对流的定态扩散下的化学元素的恒态分布. 然后，假设化学物质在下游处被测量并具有 50×10^{-6}的浓度. 计算考虑(c)具有对流的定态扩散下和(d)具有对流和化学反应的定态扩散下的化学元素的恒态下分布. 本例中所说明的质量传输分析是符合约束流公式化类型的. 对流项在分析中不占主导地位. 当把此种分析应用到对流项占主导地位的情形时，读者应特别小心；此时解可能变得不稳定.（注意本例中选择的物质参数，如反应率项，是用来说明分析的而不是表示某个物理问题.）

解 ☞ 题 3.5 和 3.33 中导出结果将被用来构造刚度矩阵. 坐标数和连通数组将在后面的题 3.35 的解中给出.

(a) 使用在节点 3 和 6 的边界条件 $c=100$ 可数值求解出只有扩散的恒态下的解. 在所有节点结果都是 100 且与扩散常数无关. 作为对整体刚度矩阵正确构造的一个检验，读者可以证明这个结果.

(b) 使用势流原理可计算水流过土壤介质的速度（见第二章）. 均匀物质意味着 $K_x=K_y=K$，且可从下面的方程得到势函数的解

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{a}$$

并且与 K 无关. 用题 3.5 的式(e)构造局部刚度矩阵. 本例中的单元是以使所有的局部刚度矩阵都是相同的方式组织的. 显然所有的单元不必是相同的. 使用 $y=0$ 做为一个基准点，则本例中在上游一侧的侧压水头就是高程水头加上压力水头，即为 16 in. 在下游一侧 $h=8$ in. 在节点 1,2,3 处的边界条件为 $h=16$，在节点 9－12 处为 $h=8$. 在其他节点处 ϕ 的解为 $h_4=13.803$，$h_5=14.379$，$h_7=10.197$ 和 $h_8=9.621$. 计算出的速度为

$$u_x=-K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \quad 和 \quad u_y=-K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \tag{b}$$

使用题 3.4 的(e)式，计算在一个单元中心的速度的等式可写为

$$\{u\}=-[K][L][N]\{h\}$$

或由题 3.4 的式(d)得

$$\begin{Bmatrix}u_x\\u_y\end{Bmatrix}=\frac{-1}{ab}\begin{bmatrix}K_{11}&0\\0&K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b+y&b-y&y&-y\\-a+x&-x&x&a-x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\end{Bmatrix} \tag{c}$$

在本例中是计算单元中心处的速度，即在式(c)中取 $x=a/2$ 和 $y=b/2$. 关于 h 值的矩阵对应题 3.34 中的连通表. 有关速度的结果列在表 3.5 中. 使用二阶项的局部刚度矩阵，题 3.5 中的式(e)，并结合题 3.33 给出的关于传输项的结果可计算出浓度. 边界条件保持与(a)部分中相同，$C_3=C_6=100$. 可以证明在每个节点处的最终结果都是 100.

表 3.5　每个单元中心的速度(10^{-5} ft/s)

单元	u_x	u_y
Ⅰ	3.0260	−0.9456
Ⅱ	1.2766	−2.5532
Ⅲ	7.2813	0.0
Ⅳ	3.0260	0.9456
Ⅴ	1.2766	2.5532

(c) 除了需要附加的边界条件，$C_9=C_{12}=50$ 之外，(c)部分的公式推导与(b)部分相同. 最终结果列在表 3.6 中.

表 3.6　有对流时的浓度

节点	浓度($\times 10^{-6}$)
1	97.381
2	98.165
3	100.000
4	89.781
5	92.818
6	100.000
7	67.458
8	63.313
9	50.000
10	56.536
11	54.348
12	50.000

(d) 化学反应项的局部刚度矩阵在题 3.33 中给出. 由于所有的单元有相同的大小, 所以所有单元的局部刚度矩阵都是相同的, 并且矩阵仅仅加入到(c)部分中导出的单元. 边界条件保持相同. 在表 3.7 中给出了浓度的结果.

表 3.7　有对流和化学反应时的浓度

节点	浓度($\times 10^{-6}$)
1	69.338
2	78.348
3	100.000
4	60.110
5	67.122
6	100.000
7	42.118
8	41.448
9	50.000
10	36.331
11	40.247
12	50.000

3.9　使用式(3.13)推导对应第二章的轴向载重杆的变分函数.

解　☞ 首先考虑体积积分中的项. 在一维情形中, 应力张量 σ_{kj} 和应变张量 ϵ_{kj} 对应轴向应力 σ 和应变 ϵ. 相似地, f_k 和 u_k 是一维中对应体积力 f 和位移 u 的向量. 一维中的基本原理是胡克定律, 即 $\sigma = E\varepsilon$. 体积积分写为

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\sigma\varepsilon - fu \right) \mathrm{d}V$$

令 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$ 和 $\int_A \mathrm{d}A = A$; 然后积分可以写成

$$\int_0^L \left(\frac{1}{2}E\varepsilon^2 - fu \right) A\mathrm{d}x$$

代入题 2.9 的式(a), 则得到所期望的结果.

$$\int_0^L \left[\frac{1}{2}E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - fu\right]A\,dx$$

积分项$\int_S T_k u_k dS$表示一个外部表面的负载，能用图3-8来说明．T_k项称为一个压力矢量，它定义一个作用在面积(表面)上的表面牵引力，如图中所示．如果轴向应力的基本定义为$\sigma = P/A$，其中P是一个作用的外部力，则表面牵引力可定义成P/A且表面积分变成$\int_A (Pu/A)dA = Pu$．此时u是杆的自由端的位移，Pu项可解释成外部功．

图3-8 受外负荷的杆

3.10 使用式(3.13)的变分函数并用矩阵形式写出平面弹性问题的相应函数．

解 式(3.13)是用笛卡儿张量标记表示的一般形式．题3.9说明了每个张量项被其一维对应项代替的一维问题．二维函数需要一个更一般的方法．但是对于那些不熟悉张量标记的读者，可以以式(3.13)为模型使用矩阵来构造函数．事实上，由于最终的结果要用适合于数值计算的形式表示，因此使用矩阵可以促进整个过程．但是在阶数上应小心．因为张量分析和矩阵原理是不能交叉的两个不同的数学概念．每个概念都有其各自的规则．矩阵原理经常被用来用适合于计算的形式表示矩阵．

现在仅仅考虑式(3.13)的体积分中的第一项．相似的矩阵表述为

$$\int_V \frac{1}{2}[\sigma]^T[\varepsilon]dV \tag{a}$$

在笛卡儿张量标记中的胡克定律为

$$\sigma_{kl} = C_{klij}\varepsilon_{ij}$$

且完全是一般的．对应的矩阵表述为

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{b}$$

并且式(b)中的每一项都有一个根据弹性问题可求解的形式．3.4节中的平面弹性问题可写为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{12} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{c}$$

且矩阵[C]对应平面应力或平面应变．将式(b)代入到式(a)得到

$$\int_V \frac{1}{2}[\varepsilon]^T[C][\varepsilon]dV \tag{d}$$

其中可使用式(3.3)用节点位移来表示应变．如同在题3.4中那样，引出一个把$[\varepsilon]$与节点位移{u}的导数联系起来的算子矩阵．单元位移必须用形状函数和节点位移的形式定义，由于在每个节点处都有两个未知量，因此这就需要一些组织．考虑图3-9中的四节点单元，其中在每个节点处有两个自由度，并且图中显示了一个标准的节点编号方案．对应x和y方向上的位移分别为u和v．节点位移矩阵可写为

$$\{u\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \tag{e}$$

单元位移是使用形状函数用{u}来定义，比如

$$u_e(x,y) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 \quad v_e(x,y) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 \tag{f}$$

一般地，单元中任意位置x, y处的位移可以写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix}u_e\\ v_e\end{Bmatrix} = [N]\{u\} \tag{g}$$

其中[N]的形式是依赖于用来定义单元上节点位移的编号序列．现在返回到式(d)和前面提到的算子矩阵．

以式(3.3)为模型，定义一个算子矩阵把应变与式(g)的位移联系起来：

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_e\\ v_e\end{Bmatrix} = [L]\begin{Bmatrix}u_e\\ v_e\end{Bmatrix} \tag{h}$$

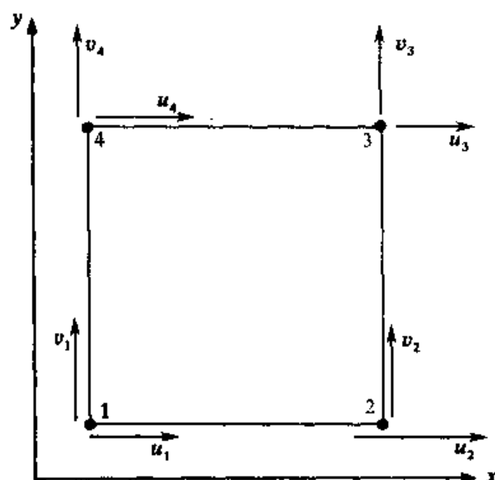


图 3-9

将式(g)代入到式(h):

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\} \tag{i}$$

并且注意到式(i)给出了在任意的 x、y 处用节点位移表示的应变.此外,由于是单元使用形状函数定义的,所以式(i)是一个可以适用于任何单元的一般表达式.在有限元分析的术语中矩阵乘积[L][N]称作[B]矩阵.将式[i]代入到式(d)就可得到变分函数中第一项的最终形式:

$$\int_V \frac{1}{2}\{u\}^T[N]^T[L]^T[C][L][N]\{u\}dV = \int_V \frac{1}{2}\{u\}^T[B]^T[C][B]\{u\}dV \tag{j}$$

式(3.13)的体积分中的第二项表示体积力并与题 3.4 中的热源项相似,变成

$$\int_V \{u\}^T[N]^T f dV \tag{k}$$

式(3.13)的表面积分表示一个自然边界条件并被称作表面牵引力,力边界条件或分布压力边界条件.在 x 或 y 方向上的单一节点上施加的集中力边界条件可用第二章中相同的方式进行处理.压力边界条件必须分布到处于被建模型物理问题边界单元的边上.表面积分给出了如何根据所使用形状函数来分布牵引力或压力的信息.具有一个下标的项 T_k 是一个矢量,并因此应有两个分量 $\{T\} = [T_x \quad T_y]^T$.用矩阵形式表示的表面积分如下.(在下面的问题中将给出其他的讨论)

$$\int_S \{u\}^T[N]^T\{T\}dS \tag{l}$$

通过合并式(j)—(l)就得到最终的结果.

3.11 使用题 3.10 中的变分叙述推导笛卡儿坐标系中平面弹性问题的四节点矩形有限元的刚度矩阵.

解 ☞ 求题 3.10 中的变分函数对位移矢量的最小.

$$\frac{\partial J}{\partial\{u\}} = \int_V [N]^T[L]^T[C][L][N]\{u\}dV - \int_V [N]^T f dV - \int_S [N]^T\{T\}dS = 0 \tag{a}$$

使用图 3-9 中的节点和位移编号方案,由此得到{u}的定义为题 3.10 的式(e).题 3.9 中的式(g)对应图 3-9,其中的形状函数矩阵为

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{b}$$

算子矩阵[L]由题 3.10 中的式(h)定义,且矩阵[B]为[L][N],它是一个由 3×2 矩阵[L]与 2×8 矩阵[N]相乘后得到的 3×8 矩阵

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 & \partial N_4/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y & 0 & \partial N_4/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial y & \partial N_4/\partial x \end{bmatrix} \tag{c}$$

通过假设在 z 方向上有等常厚度 t 后,体积分就变成了面积分.计算得刚度矩阵为

$$[K]=\int_A [B]^T[C][B]t\,dA \tag{d}$$

显示式(d)中的乘法.矩阵[C]由题3.10中得式(c)给出,且刚度矩阵的首项为

$$K_{11}=\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}C_{11}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y}C_{33}\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)t\,dx\,dy$$

形状函数的导数在问题3.5中给出并代入到上式得到

$$K_{11}=\int_0^a\int_0^b\left[C_{11}\frac{(b-y)^2}{a^2b^2}+C_{33}\frac{(a-x)^2}{a^2b^2}\right]t\,dx\,dy$$

或

$$K_{11}=\left(\frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{3b}\right)t$$

刚度矩阵是一个对称的 8×8 矩阵,如下面的式(e)

式(a)中的第二项与问题3.5中式(f)的热源项相似.关于式(a)的曲面积分将在下面的问题中讨论.

$$\begin{bmatrix}
\frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{C_{12}+C_{33}}{4} & -\frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{6b} & \frac{C_{12}-C_{33}}{4} & -\frac{C_{11}b}{6a}-\frac{C_{33}a}{6b} & \frac{C_{12}-C_{33}}{4} & \frac{C_{11}b}{6a}-\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{-C_{12}+C_{33}}{4}\\
 & \frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{3a} & \frac{-C_{12}+C_{33}}{4} & \frac{C_{22}a}{6b}-\frac{C_{33}b}{3a} & \frac{-C_{12}-C_{33}}{4} & -\frac{C_{22}a}{6b}-\frac{C_{33}b}{6a} & \frac{C_{12}-C_{33}}{4} & -\frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{6a}\\
 & & \frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{-C_{12}-C_{33}}{4} & \frac{C_{11}b}{6a}-\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{C_{12}-C_{33}}{4} & -\frac{C_{11}b}{6a}-\frac{C_{33}a}{6b} & \frac{C_{12}+C_{33}}{4}\\
 & & & \frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{3a} & \frac{-C_{12}+C_{33}}{4} & -\frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{6a} & \frac{C_{12}+C_{33}}{4} & -\frac{C_{22}a}{6a}-\frac{C_{33}b}{6a}\\
 & & & & \frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{C_{12}+C_{33}}{4} & -\frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{6b} & \frac{C_{12}-C_{33}}{4}\\
 & \text{对称} & & & & \frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{3a} & \frac{-C_{12}+C_{33}}{4} & -\frac{C_{22}a}{6b}-\frac{C_{33}b}{3a}\\
 & & & & & & \frac{C_{11}b}{3a}+\frac{C_{33}a}{3b} & \frac{-C_{12}-C_{33}}{4}\\
 & & & & & & & \frac{C_{22}a}{3b}+\frac{C_{33}b}{3a}
\end{bmatrix} \tag{e}$$

3.12 假设图3-3中的矩形单元有厚度 t 且在连接节点3和4的边上分布有一均匀压强负载 p_y,单位面积上的力.使用题3.10和3.11中的变分函数确定节点3和4上的压力.

解 ☞ 如同题3.11的式(a)那样,将曲面积分最小化,为

$$\int_S [N]^T\{T\}dS \tag{a}$$

将题3.11中的式(b)代入到上面的式(a),则得到一个一般表达式

$$\int_S\begin{bmatrix}N_1&0\\0&N_1\\N_2&0\\0&N_2\\N_3&0\\0&N_3\\N_4&0\\0&N_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_x\\T_y\end{Bmatrix}dS=\int_S\begin{Bmatrix}N_1T_x\\N_1T_y\\N_2T_x\\N_2T_y\\N_3T_x\\N_3T_y\\N_4T_x\\N_4T_y\end{Bmatrix}dS \tag{b}$$

连接节点3和4的单元边对应局部单元坐标系统中的边 $y=b$.上面式(b)中的形状函数如同题3.1中的式(e),代入 $y=b$ 得到 $N_1=N_2=0$, $N_3=x/a$ 和 $N_4=(a-x)/a$.表面牵引力用 $T_x=p_x=0$ 和 $T_y=p_y$ 代替.最后 dS 用 $t\,dx$ 代替,其中 t 是单元的厚度且积分是沿 x 轴的.注意如果表面负载是用每单位长度的力来表示,则 t 可以省略.将 N_3 和 N_4 代入到式(b)并在0到 a 上积分,得到最终的负载矢量为

$$\{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad p_ya/2\quad 0\quad p_ya/2\}^Tt \tag{c}$$

3.13 图3-10的金属板是 6×10 in 和 0.2 ft 厚,如图所示负载有 10,000 psi[①]的张力.使用一个单元分析计算节点位移,应变和应力.假设 $E=10(10^6)$psi,并且求当 $v=0$ 和 $v=$

① 1 psi $=6.89476\times10^3$ Pa.

0.3时题的解.

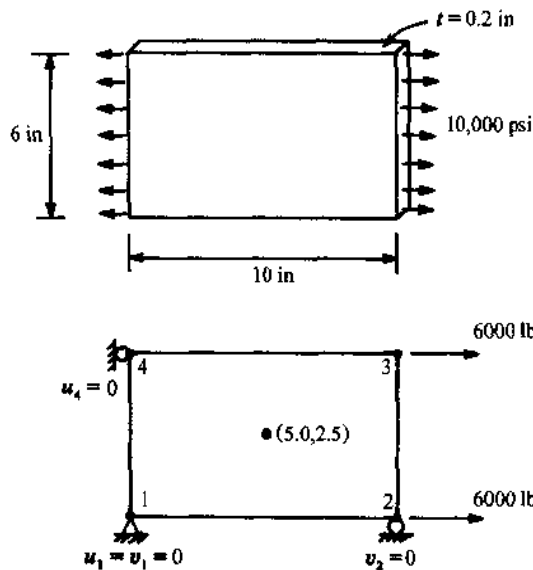


图 3-10

解 应将金属板按平面应力情况分析.边界条件应允许金属板在两个坐标方向上变形,但不允许有刚性的体位移和旋转.节点 1 在两个方向上都是固定不变的,节点 2 在 y 方向上是固定的,节点 4 在 x 方向上是固定的,如图 3-10 所示.对于 8 个可能的节点位移来说,$u_1 = u_4 = v_1 = v_2 = 0$ 是边界条件.

在题 3.12 中得到的结果表示分布到节点 2 和 3 的压强负载应为(10,000 psi)(6 in)(0.2 in)/2 = 6000 lb.由题 3.11 的式(e)给出的局部刚度矩阵变成一个单元模型的整体刚度矩阵.物质常数可用平面应力的本质方程进行计算,当 $v = 0.3$ 时,式(3.6)—式(3.8)得到 $C_{11} = C_{22} = E/(1-v^2) = 10.9890(10)^6$ psi, $C_{12} = vE/(1-v^2) = 3.2967(10)^6$ psi 和 $C_{33} = E/2(1+v) = 3.8462(10)^6$ psi.将边界条件和负载矢量代入后,对应 $v = 0.3$ 的刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,334,555 & 0 & -1,037,850 & -137,363 & 0 & 1,785,710 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,037,850 & 0 & 4,334,555 & 1,785,710 & 0 & -137,363 \\ 0 & 0 & -137,363 & 0 & 1,785,710 & 6,874,240 & 0 & 2,283,270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,785,710 & 0 & -137,363 & 2,283,270 & 0 & 6,874,240 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

位移结果在表 3.8 中给出.

表 3.8　节点位移(in)

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
$v=0$	0.0	0.0	0.002	0.0	0.002	0.0	0.0	0.0
$v=0.3$	0.0	0.0	0.002	0.0	0.002	−0.00036	0.0	−0.00036

因为用线性形状函数推算这个问题的线性解,因此位移的解是准确的.此外,当 $v=0$ 时问题是一维的且简化到第二章讨论的轴向负载的情形.

使用题 3.10 的式(i)计算应变.注意矩阵乘积[L][N] = [B]由题 3.10 的式(c)给出,形状函数的导数由题 3.5 的式(d)给出.选择题 3.5 中式(d)里的 x 和 y 为 $x = a/2 = 5.0$ 及 $y = b/2 = 3.0$,以此

表示单元中心并计算$\{\varepsilon\}=[B]\{u\}$. 当 $v=0$ 时, $\varepsilon_{xx}=0.0002$和 $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{xy}=0.0$, 当 $v=0$ 时, $\varepsilon_{xx}=0.0002$, $\varepsilon_{yy}=-0.0006$ 且 $\varepsilon_{xy}=0.0$. 另外此基本问题的解是精确的.

使用题 3.10 的(c)计算应力, 并且对于两种情形都有 $\sigma_{xx}=2000$ 和 $\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0.0$.

3.14 使用图 3-4 中定义的三节点单元推导热传导问题的局部刚度矩阵.

解 ☞ 局部刚度矩阵由题 3.5 中的式(b)定义:

$$[K]=\int_A [B]^T[k][B]t\,dx\,dy \tag{a}$$

温度用每个节点处的未知温度来表示, 且除了这里只有三个节点值的差别外, 它与题 3.4 中的式(b)相似:

$$T=[N_1\quad N_2\quad N_3]\{T_1\quad T_2\quad T_3\}^T=[N]\{T\}^T \tag{b}$$

形状函数由题 3.2 中的式(i)给出, 为方便起见, 将它们写成如下形式

$$\begin{aligned} N_1&=\frac{a_1+b_1x+c_1y}{2A}\\ N_2&=\frac{a_2+b_2x+c_2y}{2A}\\ N_3&=\frac{a_3+b_3x+c_3y}{2A} \end{aligned} \tag{c}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1&=x_2y_3-x_3y_2 & b_1&=y_2-y_3 & c_1&=x_3-x_2\\ a_2&=x_3y_1-x_1y_3 & b_2&=y_3-y_1 & c_2&=x_1-x_3\\ a_3&=x_1y_2-x_2y_1 & b_3&=y_1-y_2 & c_3&=x_2-x_1 \end{aligned}$$

使用式(c)来定义式(b)的形状函数矩阵为

$$[N]=[1\quad x\quad y]\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\div 2A$$

对于热传导问题或一切由具有 $\beta=0$ 时的式(3.1)形式的方程所控制的问题, [B]矩阵的构造形式为[L][N], 其中算子矩阵[L]由题 3.4 的式(e)给出.

$$[L][N]=\begin{bmatrix} \partial/\partial x\\ \partial/\partial y \end{bmatrix}[N]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\div 2A$$

或

$$[B]=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\div 2A$$

式(a)中的物质矩阵是一个 2×2 矩阵且与题 3.4 中的物质矩阵相同. 由于所有的项均为常数, 所以面积积分为 $\int_A dx\,dy=A$, 等于三角形的面积. 代入到式(a)得到对称矩阵为

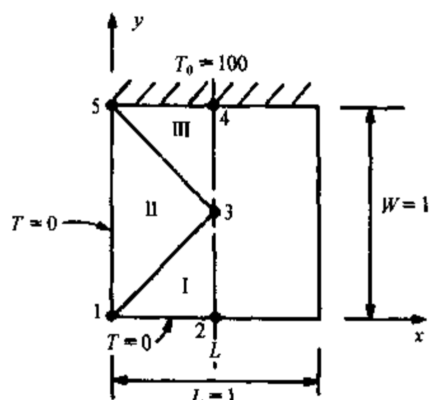
$$[K]=\begin{bmatrix} b_1^2k_x+c_1^2k_y & b_1b_2k_x+c_1c_2k_y & b_1b_3k_x+c_1c_3k_y\\ & b_2^2k_x+c_2^2k_y & b_2b_3k_x+c_2c_3k_y\\ & & b_3^2k_x+c_3^2k_y \end{bmatrix}\frac{t}{4A} \tag{d}$$

式(d)可用来进行数值计算. 但是为了计算机实现, 更为实际的做法是构造单个矩阵并使用矩阵相乘的程序计算[K].

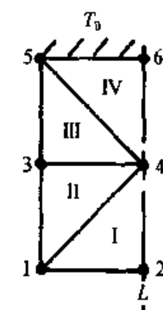
3.15 计算题 3.6 中金属板的稳定状态温度分布: (a) 使用图 3-11(a)中的三个三角单元, (b) 使用图 3-11(b)中的四个三角单元.

解 ☞ (a) 使用对称性建立题 3.6 中金属板的模型. 由节点 1—3 构成单元Ⅰ被用来计算将要代入到题 3.14 式(d)中的局部刚度矩阵的各项, 沿着矩阵的顶端和侧边的数值对应整体矩阵中的行, 列位置. 注意 $k_x=k_y=1.0$.

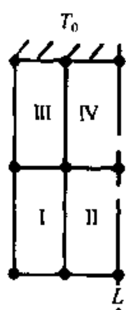
单元Ⅰ:



(a) 三单元模型



(b) 四单元模型



(c) 转换的四单元模型

图 3-11

$b_1=-0.5\quad c_1=0.0\quad A=0.125$

$b_2=0.5\quad c_2=-0.5$

$b_3=0.0\quad c_3=0.5$

$$[K_{\mathrm{I}}]=\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & 0.0\\ -0.5 & 1.0 & -0.5\\ 0.0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\end{array}$$

由题 3.2 中给出的结果可计算出面积 A. 对单元Ⅱ和Ⅲ进行同样的计算得到下面的结果:

单元Ⅱ:

$b_1=-0.5\quad c_1=-0.5\quad A=0.25$

$b_2=1.0\quad c_2=0.0$

$b_3=0.5\quad c_3=-0.5$

$$[K_{\mathrm{II}}]=\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 3 & 5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & 0.0\\ -0.5 & 1.0 & -0.5\\ 0.0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\3\\5\end{matrix}\end{array}$$

单元Ⅲ:

$b_1=0.0\quad c_1=-0.5\quad A=0.125$

$b_2=0.5\quad c_2=0.5$

$b_3=-0.5\quad c_3=0.0$

$$[K_{\mathrm{III}}]=\begin{array}{c}\begin{matrix}3 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & 0.0\\ -0.5 & 1.0 & -0.5\\ 0.0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\end{array}$$

单元刚度矩阵被组合以构成整体刚度矩阵.

$$\begin{bmatrix}1.0 & -0.5 & -0.5 & 0.0 & 0.0\\ -0.5 & 1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0\\ -0.5 & -0.5 & 2.0 & -0.5 & -0.5\\ 0.0 & 0.0 & -0.5 & 1.0 & -0.5\\ 0.0 & 0.0 & -0.5 & -0.5 & 1.0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\end{Bmatrix}=\{0\}$$

代入边界条件 $T_1=T_2=0$ 和 $T_4=T_5=100$, 可将上面的方程组简化成具有一个未知量的方程, 并可计算出 $T_3=50.0$.

(b) 用相同的方法可构造四单元模型的刚度矩阵;并省略中间步骤. 在代入边界条件以前的整体刚

度矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

代入边界条件后 T_3 是惟一的未知量.计算出它为 $T_3=25.0$,这与题 3.6 中的结果完全相同.当与题 3.6 中四单元分析相比,就有一些关于这种分析精确性的说明.这种四个三角形的分析的方案比题 3.6 中四个矩形更精确地适合求解表面实际的温度分布.但是这不能推断出三节点三角形比四节点矩形更精确.有兴趣的读者应用图 3-11(c)所示的矩形单元方案建立金属板的模型,因为这种方案看起来更好地逼近解表面

3.16 证明对一个三节点三角形有限单元面积坐标与形状函数有关.并且面积坐标导致了形状函数一个不同的,但却等价的公式形式.

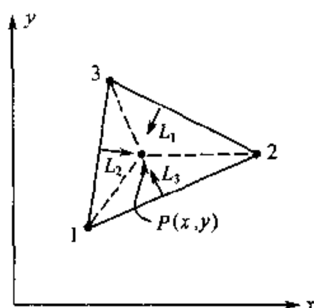


图 3-12

解 考虑图 3-12 中的三角单元,它与图 3-4 中的三角单元相似.内点 P 不是节点而仅仅是一个任意的参考点.面积坐标定义为

$$L_1=\frac{\text{area}(2-3-P)}{\text{area}(1-2-3)}\quad L_2=\frac{\text{area}(3-1-P)}{\text{area}(1-2-3)}$$

$$L_3=\frac{\text{area}(1-2-P)}{\text{area}(1-2-3)} \tag{a}$$

参数 L_1,L_2 和 L_3 称作面积坐标,因为它们当中的每一个都代表着整个三角形面积的一个部分,并且它们的和应等于整个三角形面积(图 3-12):

$$\text{Area}(2-3-P)+\text{area}(3-1-P)+\text{area}(1-2-P)=\text{area}(1-2-3)$$

代入到式(a)有

$$L_1+L_2+L_3=1$$

这样的坐标有时被称作自然坐标,且可用已说明的形式表达.坐标 L_1 起始于边 2-3 并对应由边 2-3 和点 P 所定义的三角形的面积.注意如果允许 L_1 增大并到达节点 1,则它的值是 1,而 $L_2=L_3=0$.看起来 L_1 的行为类似于节点 1 的形状函数 N_1.事实上,由图 3-12 可导出下面的关系

$$L_1=\begin{cases}1, & \text{在节点 1}\\ 0, & \text{在节点 2 和 3}\end{cases}$$

$$L_2=\begin{cases}1, & \text{在节点 2}\\ 0, & \text{在节点 1 和 3}\end{cases}$$

$$L_3=\begin{cases}1, & \text{在节点 3}\\ 0, & \text{在节点 1 和 2}\end{cases}$$

图 3-4 说明了每个节点的坐标位置.面积坐标 L_3 相对于整体面积的比值是(x,y 是 P 点的位置)

$$L_3=\frac{\text{area}(1-2-P)}{\text{area}(1-2-3)}=\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x\\ y_1 & y_2 & y\end{bmatrix}\div A_{\text{total}}$$

或

$$L_3=[(x_1y_2-x_2y_1)+x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)]/2A_{\text{total}} \tag{b}$$

方程(b)与由题 3.2 中式(i)给出的定义相同,则可得到对三节点的三角单元有 $L_3=N_3$.通过相似的计算可得到等价的定义 $L_1=N_1$ 和 $L_2=N_2$.

3.17 使用面积坐标和数值面积积分推导对应式(3.2)中化学反应项的三节点三角单元的刚度矩阵.

解 由面积坐标和相应的积分公式可实现一个三节点三角形上的面积积分:

$$\int_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma \mathrm{d}A=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\lambda+2)!}2A \tag{a}$$

要推导的刚度矩阵的变分形式将在题 3.32 中给出(函数中第三项),在对 $\{C\}$ 求最小化后,表现为

$$\int_A [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{K}_r][\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{b}$$

通过定义一个作用在[N]上的算子矩阵，由题 3.4 中的方法上面的函数转换成有限元模型．此时算子仅仅定义形状函数，用一个单位矩阵表示：

$$[\mathrm{L}][\mathrm{N}] = [1][N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \tag{c}$$

最终的结果只停留在上面式(c)的形式，而没有将题 3.14 中的式(c)代入．读者应该比较一下已推导出来的各种刚度矩阵．在所有的情形中[N]矩阵表示被使用的单元，算子矩阵用来表示节点项在微分方程或变分函数中出现的方式．最后式(b)被构造成如下

$$\int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} [\mathrm{K}_r][N_1 \quad N_2 \quad N_3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} t \tag{d}$$

由式(d)表示的矩阵相乘导致如下类型的项

$$K_{11} = \int_A N_1 K_r N_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由题 3.14 中式(c)给出的形状函数定义将会导致在代数上复杂的数学运算．使用题 3.16 的结果或只考虑首项，形状函数可用其等价定义来代替，则式(a)为

$$\int_A N_1 K_r N_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A L_1 K_r L_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A L_1^2 K_r \mathrm{d}A = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} K_r 2A = \frac{K_r}{12} 2A$$

注意指数式(a)中的 α 和 β 都为零且在计算中代入它们的零值．如同题 3.15 那样计算面积，对化学反应项的完全的刚度矩阵就变成

$$\frac{K_r A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{e}$$

3.18　使用三节点三角形单元的形状函数表示式(3.2)中对流项的刚度矩阵，并证明怎样用面积坐标和面积积分计算最终的局部刚度矩阵．

解　☞ 在最小化完成之后在题 3.32 中的变分函数中的对流项的形式为

$$\int_A [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{u}][\mathrm{L}][\mathrm{N}]\{C\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{a}$$

在这个例子中算子矩阵对应如同题 3.14 所示的一阶导数．$[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}$ 的首项对应前一个问题的形状函数矩阵，但是必须写成可适应二维公式化推导的形式．题 3.17 中的式(c)写为

$$[\mathrm{L}][\mathrm{N}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵构造如下

$$\int_A \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ N_3 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & 0 \\ 0 & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} t\mathrm{d}A \tag{b}$$

计算得刚度矩阵的第一项为

$$K_{11} = \int_A \left(N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) t\mathrm{d}A \tag{c}$$

用等价的面积坐标代替形状函数，并用数值积分计算式(c)．偏导数不是 x, y 的函数，并且由题 3.14 中的结果在式(c)积分之前可计算出这些偏导数．在代入用面积坐标表示的形状函数之后，被积分的项表示为

$$K_{11} = \int_A \left(L_1 u_x \frac{b_1}{2A} + L_1 u_y \frac{c_1}{2A} \right) t\mathrm{d}A = \frac{(1!0!0!)2Au_x b_1 t}{(1+0+0+2)!2A} + \frac{(1!0!0!)2Au_y c_1 t}{(1+0+0+2)!2A} = \frac{(u_x b_1 + u_y c_1)t}{6}$$

对流项的局部刚度矩阵是 3×3 的，用相同的方法计算其余各项．(见题 3.39)

3.19　使用三节点三角单元推导平面应力分析中的[B]矩阵．

解　☞ 推导过程与题 3.11 中的相同．在这里必须计算三节点单元的矩阵乘积，其中的导数可代

入题 3.14 中的结果.

$$[\mathrm{B}]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3\end{bmatrix}\div 2A \tag{a}$$

3.20 假设在图 3-13 中的三角单元的节点 1 和 2 之间有一均匀变化的压强负载 p_x，使用积分公式计算在节点 1 和 2 的负载分布.

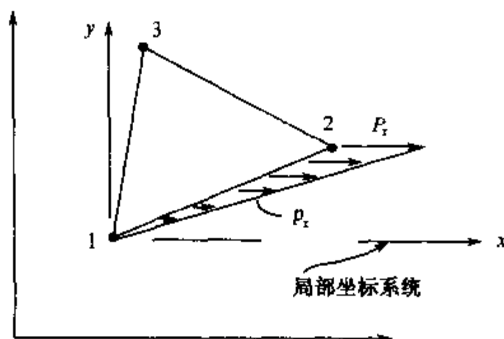


图 3-13

解 ☞ 假设在节点 1 处建立一个局部坐标系，则压强负载公式为

$$p_x = P_x\frac{y_1-y}{y_1-y_2} = P_x\frac{y_1-y}{b_3} \tag{a}$$

在此数值积分的计算中，积分是沿着一条线而不是在一个面积上进行. 对此沿着一条线的积分公式是与题 3.17 中的式(a)一致，此时坐标称为长度坐标：

$$\int_\xi L_1^\alpha L_2^\beta \mathrm{d}\xi = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}\xi \tag{b}$$

一维有限元公式可用长度坐标来表示，但是当与更为传统的笛卡儿坐标相比，它通常没有什么优势. 延续在题 3.12 中式(b)所使用的方法，并回想一下 $\{T_x\quad T_y\}^T$ 表示任意牵引力类型的表面负载. 沿着连接节点 1 和 2 的线段上 L_3 为零，或者根据长度坐标知只有 L_1 和 L_2 存在，对应 T_y 的项都为零：

$$\int_S\begin{bmatrix}N_1 & 0\\ 0 & N_1\\ N_2 & 0\\ 0 & N_2\\ N_3 & 0\\ 0 & N_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_x\\ T_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}S = \int_\xi\begin{Bmatrix}L_1\quad P_x(y_1-y)/b_3\\ 0\\ L_2\quad P_x(y_1-y)/b_3\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}t\,\mathrm{d}y \tag{c}$$

根据面积坐标和三角单元的坐标，

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$$

但是在节点 1 和 2 之间 $L_3=0$. 将 y 代入到式(c)并使用(b)对矩阵中的首项积分：

$$\int_{y_1}^{y_2}L_1P_x(y_1-L_1y_1-L_2y_2)\left(\frac{t}{b_3}\right)\mathrm{d}y = P_x\left(\frac{1!0!}{2!}-\frac{2!0!}{3!}-\frac{1!1!}{3!}\right)\frac{t}{b_3}(y_2-y_1) = \frac{P_xt}{6}(y_2-y_1)$$

对矩阵中的第三项做相似的计算就得到对节点 2 的分布：

$$\frac{P_xt}{3}(y_2-y_1)$$

三分之一的压强分配给了节点 1，三分之二的压强分配给了节点 2.

3.21 具有式(3.1)的形式的物理方程已经有了多种解释. 题 3.5 的式(f)表示一个作用在物

体上的等常热源被平均分布到矩形单元的所有四个节点上.在某些情况下热源可以看成是点源.那么这时热的产生或耗散依赖于单元中源的位置.对于图 3-14 单元,假设一热点源坐落在点 $x_Q=4, y_Q=3$,计算每个节点处的热分布.

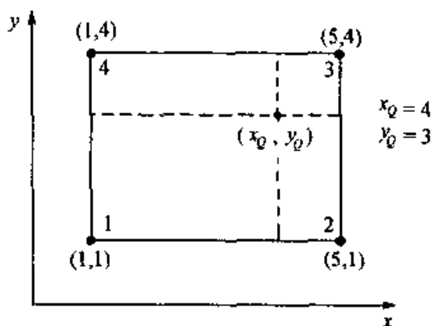


图 3-14

解 ☞ 从形式上来说,题 3.5 中式(a)的右手项是用来计算位于(x_Q, y_Q)的点源.源项 Q 能被模拟成一个单位脉冲函数

$$Q(x,y) = Q(x_Q, y_Q)\delta(x - x_Q)\delta(y - y_Q) \tag{a}$$

一个函数与一个单位脉冲函数相乘后的积分可认为是此函数在定义此函数位置的坐标处的值(Wylie, 1960, 340).在题 3.1 中已给出形状函数,相似于题 3.5 的式(f),$Q(x_Q, y_Q)$的分布为

$$\int_A [N]^T Qt\,dx\,dy = \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} Q(x_Q, y_Q)\delta(x - x_Q)\delta(y - y_Q)t\,dx\,dy$$

$$= \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} Q(x_Q, y_Q)t$$

计算 $a=4, b=3, x_Q=3$ 和 $y_Q=2$ 时的形状函数值,则得最后结果为

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{3}{12} \\ \frac{6}{12} \\ \frac{2}{12} \end{Bmatrix} Q(x_Q, y_Q)$$

根据图 3-14 中定义的面积来分布全部得点源.例如,分配给节点 3 的热源与点源和节点 1 定义的面积成比例.

3.22 推导在图 3-15 所示的九节点矩形单元的形状函数.

解 ☞ 九节点单元包含有位于单元每条边中点的边中节点,以及位于单元中心的第九个节点.图中所示的节点编号是标准的,其中边中节点被编成 5 至 8 号,但是节点编号的顺序可以是任意的.在本例中假设单元的大小(局部坐标系)为 a 和 b,也可以使用 $2a \times 2b$ 的形式.在后面的章节中将引导出类似于 $-a$ 到 $+a$ 和 $-b$ 到 $+b$ 的局部坐标系.

由题 2.31 的结果和图 2-10 可以导出形状函数.在图 3-15 中再次使用全局坐标 x 和对应的 y、重复题 2.30 的结果以作为参考,并用一个额外的下标表示在全局坐标系中的 x 方向.

$$N_{1x} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad N_{5x} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad N_{2x} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \tag{a}$$

在局部坐标系中令节点 1,5 和 2 对应 $x_1=0, x_2=a/2$ 和 $x_3=a$.将它们代入到式(a)后就可得到在

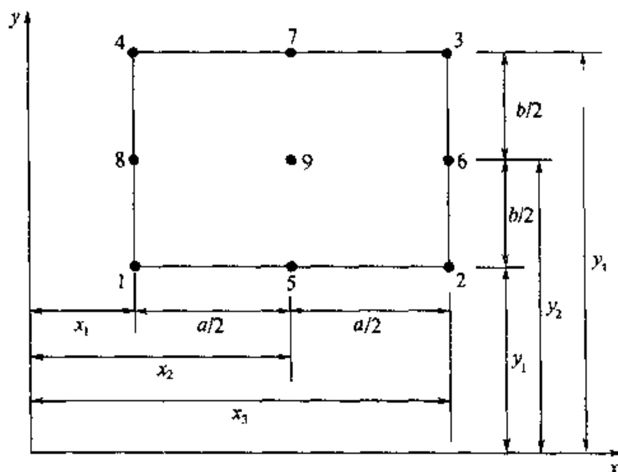


图 3-15

节点 1,5 和 2 处仅 x 方向上的形状函数:

$$N_{1x}=\frac{[x-(a/2)](x-a)}{[0-(a/2)](0-a)}=\frac{(2x-a)(x-a)}{a^2} \tag{b}$$

类似地,由式(a)可构造出九节点单元的 N_{5x}:

$$N_{5x}=\frac{(x-0)(x-a)}{[(a/2)-0][(a/2)-a]}=\frac{x(x-a)}{-(a^2/4)} \tag{c}$$

想象一下使用图 3-15 中的 y_1,y_2 和 y_3 可以推导沿全局坐标系 y 轴的形状函数,其结果就为将式(a)中的所有 x 都替换成 y.九节点单元中节点 1 的形状函数就是将式(b)中的 x 和 a 分别替换成 y 和 b.节点 1 的二维形状函数是节点 1 的两个一维形状函数的乘积:

$$N_1=N_{1x}N_{1y}=\frac{(2x-a)(x-a)(2y-b)(y-b)}{a^2b^2} \tag{d}$$

将对应节点 1 的局部坐标($x=0,\ y=0$)代入到式(d)就得到 $N_1=1$,并且在其他所有节点处 N_1 的值都为零.

由式(a)的第一项可构造出二维形状函数中 y 的贡献作用,且与(d)中使用的形式相同,或对应图 3-15 可将其写为

$$N_{5y}=\frac{(y-y_9)(y-y_7)}{(y_5-y_9)(y_5-y_7)}=\frac{(2y-b)(y-b)}{b^2} \tag{e}$$

显然,九节点矩形单元是由二次形状函数组合而成.由此得到

$$N_5=N_{5x}N_{5y}=-\frac{4x(x-a)(2b-y)(y-b)}{a^2b^2} \tag{f}$$

重要的结果是可以从一维形状函数构造出二维或三维形状函数.用相似的方法可获得其余的形状函数.作为练习读者应证明此结果:

$$N_2=-\frac{x(2x-a)(2y-b)(y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_3=\frac{x(2x-a)y(2y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_4=\frac{(2x-a)(x-a)y(2y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_6=-\frac{4xy(2x-a)(y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_7=-\frac{4xy(x-a)(2y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_8=-\frac{4y(2x-a)(x-a)(y-b)}{a^2b^2}$$

$$N_9=\frac{16xy(x-a)(y-b)}{a^2b^2}$$

3.23　图 3-16 中的矩形单元在节点 2 处被一个斜面支撑,以至于平行于斜面的位移为零,

$u_{2\xi}=0$. 构造变换矩阵和变换后并能考虑此种边界条件类型的局部刚度矩阵.

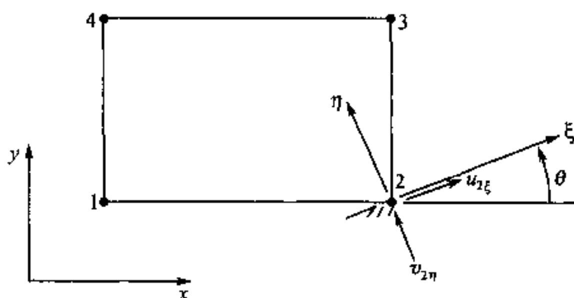


图 3-16

解 ☞ 将 ξ,η 坐标系中的位移被转换成 x,y 坐标系中. 因此, 式(3.15)就是一个恰当的变换. 对此局部单元的变换为

$$[T]^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&c&-s&0&0&0&0\\0&0&s&c&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{a}$$

其中 $c=\cos\theta$ 及 $s=\sin\theta$. 使用式(a)则可得到定义变换的矩阵描述为

$$\{u_{xy}\}=[T]^T\{u_{\xi\eta}\}\tag{b}$$

但是应需记住此点处的位移是未知的, 并且式(b)是用来变换刚度矩阵以对应由 $u_{2\xi}$和 $v_{2\eta}$施加的边界条件. 用 x,y 坐标系中的位移表示题 3.10 中的式(j), 它是描述一弹性问题变分函数的矩阵形式,

$$\int_V\frac{1}{2}\{u_{xy}\}^T[B]^T[C][B]\{u_{xy}\}dV\tag{c}$$

将(b)代入到(c)并注意到$\{u_{xy}\}^T=\{u_{\xi\eta}\}^T[T]$

$$\int_V\frac{1}{2}\{u_{\xi\eta}\}^T[T][B]^T[C][B][T]^T\{u_{\xi\eta}\}dV$$

求函数对新的位移矢量的最小化, 但对刚度矩阵的定义保持不变, 如同在题 3.11 的式(d)给出的那样, 令 $[K]=\int_A[B]^T[C][B]t\,dA$, 这是因为[T]不是坐标的函数. 则变换后的矩阵为

$$[K]_t=[T][K][T]^T\tag{d}$$

其中下标 t 表示变换后的刚度矩阵. 边界条件能够用在问题的整体变换之中.

3.24 假设在质量输运问题的公式化过程中, 关于对流项的局部四节点的刚度矩阵已经无意地以 1,3,4,2 的顺序编号, 而不是以按标准的顺序 1,2,3,4. 推导一个可用来将单元按标准编号方案重新编号的变换矩阵. (此问题有一定的假想性, 但可用来说明使用一个具有最小项数刚度矩阵的变换)

解 ☞ 在这个例子中节点未知量的矩阵$\{C_1\quad C_3\quad C_4\quad C_2\}^T$必须变换成$\{C_1\quad C_2\quad C_3\quad C_4\}^T$. 完成此变换的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_3\\C_4\\C_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}\quad\text{或}\quad[T][C]_{old}=\{C\}_{new}\tag{a}$$

此变换表示将旧的或先前的编号系统转换成新的系统. 由于$[T]^T=[T]^{-1}$或$[T][T]^T=[1]$, 则逆变

换定义如下：

$$\{C\}_{old} = [T]^T\{C\}_{new} \tag{b}$$

矩阵中的非零项可以用下面的方法来表示．令对应新号的行和列对应旧号，或

$$T(I_{new}, J_{old}) = I \quad 其他\ T(I,J) = 0 \tag{c}$$

则可得式(a)中的非零项为 $T(1,1)=1, T(3,2)=1, T(2,4)=1$ 和 $T(4,3)=1$.

使用题 3.23 中式(d)所描述得概念对局部刚度矩阵进行变换，$[K]_{new}=[T][K]_{old}[T]^T$. 作为练习，读者可以证明下面的矩阵相乘能够得到期望的结果

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{11}&K_{13}&K_{14}&K_{12}\\K_{31}&K_{33}&K_{34}&K_{32}\\K_{41}&K_{43}&K_{44}&K_{42}\\K_{21}&K_{23}&K_{24}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}&K_{13}&K_{14}\\K_{21}&K_{22}&K_{23}&K_{24}\\K_{31}&K_{32}&K_{33}&K_{34}\\K_{41}&K_{42}&K_{43}&K_{44}\end{bmatrix}$$

3.25　推导用 r, z 坐标表示的二维轴对称问题的变分函数，并对相应局部有限元刚度矩阵的公式化进行讨论．

解　☞ 变分函数就是对式(2.31)进行扩展以将 z 坐标包含进来．控制微分方程对应具有考虑 $\theta=0$ 的偏导数的式(3.16)，并且有 $\beta=0$. 回忆对轴对称问题的 dV 用 $2\pi r dr dz$ 来代替．则变分函数为

$$J(T) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[k_r\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + k_z\left(\frac{dT}{dz}\right)^2 - 2QT\right]\pi r dr dz \tag{a}$$

注意上面的式(a)相似于题 3.4 中的式(a)，并且题 3.4 中的(e)和式(f)当 x 和 y 分别被 r 和 z 代替后也是适用的．用矩阵形式表示的变分函数为

$$J(T) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}[\{T\}^T[B]^T[k][B]\{T\} - 2\{T\}^T[N]^T Q]\pi r dr dz \tag{b}$$

将函数对$\{T\}$最小化，则刚度矩阵的最终形式为

$$[K] = \int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}[B]^T[k][B]2\pi r dr dz \tag{c}$$

且热传导项为

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}[N]^T Q 2\pi r dr dz \tag{d}$$

可将 2π 项从方程中消去，但通常应保留它以免当指定流边界条件时产生混乱．

使用从题 3.1 和 3.8 以及图 3-17 导出的结果可以得到形状函数，其中为化简形状函数将 z 的限替换成 0 到 b. 注意 z 的限可以变成局部坐标系而不改变最终的结果，但是 r 必须在 r_1 到 r_2 的整体坐标系中，这是因为在 $r=0$ 时体积会发生变化：

$$N_1 = \frac{(r-r_2)(z-b)}{Rb} \quad N_2 = -\frac{(r-r_1)(z-b)}{Rb}$$
$$N_3 = \frac{(r-r_1)z}{Rb} \quad N_4 = -\frac{(r-r_2)z}{Rb} \tag{e}$$

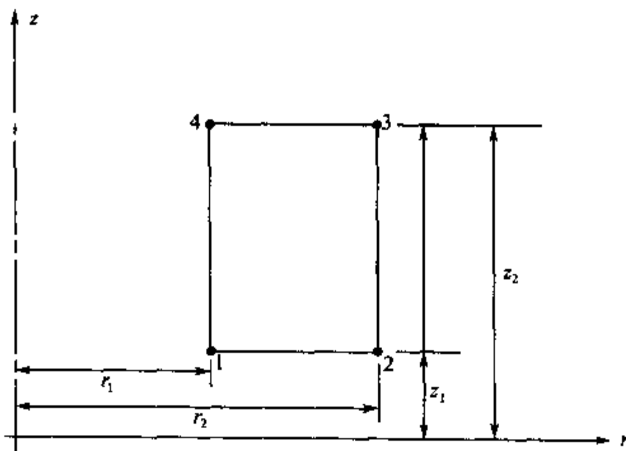


图 3-17　对称四节点单元

其中 $R = r_2 - r_1$.刚度矩阵的构造与在题 3.5 中所描述的方法相同.由(c)的 K_{11}项将说明局部刚度矩阵的公式化:

$$K_{11} = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^b \left(\frac{\partial N_1}{\partial r} k_r \frac{\partial N_1}{\partial r} + \frac{\partial N_1}{\partial z} k_z \frac{\partial N_1}{\partial z} \right) 2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}z$$

代入式(e)中适当的导数,有

$$K_{11} = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^b [r(z-b)^2 k_r + r(r-r_2)^2 k_z] \frac{2\pi}{R^2 b^2} \mathrm{d}r \mathrm{d}z$$

或

$$K_{11} = 2\pi \left\{ \frac{k_r b^3}{6}(r_2^2 - r_1^2) + \frac{k_z b}{12}[3(r_2^4 - r_1^4) - 8r_2(r_2^3 - r_1^3) + 6r_2^2(r^2 - r_1^2)] \right\} \tag{f}$$

虽然可对结果做些简化,但是代数运算比较复杂,且式(f)适合于计算机插值.实际中,经常适用数值积分计算轴对称问题.从教学观点来看,使用类似式(f)的项推导刚度矩阵是有价值的,然而编写计算机程序时,通常使用更为实用的方法.无论如何,作为一个练习,读者应推导刚度矩阵中其余各项.

3.26 使用三节点三角单元讨论用 r, z 坐标表示的二维轴对称弹性问题局部刚度矩阵的公式形成.

解 ☞ 对平面弹性轴对称单元的推导符合已在前面章节中所叙述的概念.题 3.10 的式(j)给出了问题的变分叙述,并由此得到方程中的所有矩阵必须变换成对应三节点轴对称的形式.应变必须用一个算子矩阵[L],一个形状函数矩阵[N],和对应三节点单元的位移矢量,或下面的题 3.10 中的式(i){ε}=[L][N]{u}来表示.假设 $u = \partial/\partial\theta = 0$,则可从式(3.17)可获得四个应变:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial r \\ u/r \\ \partial w/\partial z \\ \partial w/\partial r + \partial u/\partial z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

题 3.14 中的式(c)给出形状函数,u 和 v 是每个节点处分别在 r 和 z 方向上的位移.从式(a)中可获得[B]矩阵并使用题 3.14 中的定义可计算如下:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial r & 0 & \partial N_2/\partial r & 0 & \partial N_3/\partial r & 0 \\ N_1/r & 0 & N_2/r & 0 & N_3/r & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial z & 0 & \partial N_2/\partial z & 0 & \partial N_3/\partial z \\ \partial N_1/\partial z & \partial N_1/\partial r & \partial N_2/\partial z & \partial N_2/\partial r & \partial N_3/\partial z & \partial N_3/\partial r \end{bmatrix} \div 2A$$

或

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ \frac{a_1}{r} + b_1 + \frac{c_1 z}{r} & 0 & \frac{a_2}{r} + b_2 + \frac{c_2 z}{r} & 0 & \frac{a_3}{r} + b_3 + \frac{c_3 z}{r} & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \div 2A$$

局部刚度矩阵已在前一个问题中得到计算:

$$[\mathrm{K}] = \int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{C}][\mathrm{B}] \mathrm{d}V$$

其中 $\mathrm{d}V$ 用 $2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}z$ 代替.当与题 3.25 中的式子进行比较时,上面的积分有一些复杂.实际中对此积分普遍使用两种方法.第一种,对刚度矩阵中的每一项进行数值积分,关于此问题的讨论将在后面的章节予以叙述.第二种,也是更为基本的方法是用一个平均值代替矩阵中所有的 r 和 z,并用题 3.14中定义的 a_i, b_i 和 c_i 值计算其余各项.由此得 r 和 z 的平均值简单地为

$$r_{\mathrm{avg}} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad \text{和} \quad z_{\mathrm{avg}} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \tag{b}$$

局部刚度矩阵可写为

$$[\mathrm{K}] = 2\pi r_{\mathrm{avg}} A [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{C}][\mathrm{B}] \tag{c}$$

从式(3.18)中可获得物质常数矩阵为

$$[C]=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix}1-v & v & v & 0\\ v & 1-v & v & 0\\ v & v & 1-v & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1-2v)/2\end{bmatrix} \tag{d}$$

3.27 当对 z 坐标的依赖性可忽略不计时，一个平面弹性问题可用极坐标公式表示.假设在极坐标系 r,θ 中有一个四节点单元，其中 θ 用弧度表示，推导形状函数和相应的[B]矩阵.

解 形状函数应与题 3.25 中的式(e)一致，其中 θ 是在图 3-18 中的局部坐标系中对所有的单元都是从 0 变化到 α：

$$N_1=\frac{(r-r_2)(\theta-\alpha)}{R\alpha}\quad N_2=-\frac{(r-r_1)(\theta-\alpha)}{R\alpha}$$
$$N_3=\frac{(r-r_1)\theta}{R\alpha}\qquad N_4=-\frac{(r-r_2)\theta}{R\alpha} \tag{a}$$

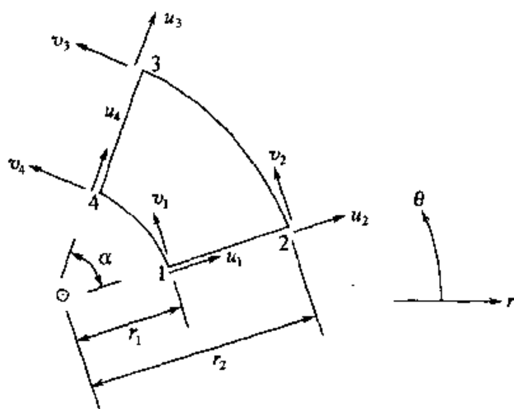


图 3-18

[B]矩阵的形成相似于在题 3.11 中所使用的方法.在任何有限元的公式化过程中，[B]矩阵总是写成一个算子矩阵后乘一个形状函数矩阵的形式，即[B] = [L][N].假设 $w=0$ 和 $\partial/\partial z=0$，则从(3.17)式就可得到算子矩阵，其中 u 和 v 分别为 r 和 θ 方向上的位移.题 3.11 的式(b)中的形状函数矩阵针对本问题也是有效的，因为它同样符合图 3-18 中的节点编号.根据题 3.10 中所述的应变-位移方程 $\{\varepsilon\}=[L][N]\{u\}$，可构造出算子矩阵：

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial/\partial r & 0\\ 1/r & (1/r)\partial/\partial\theta\\ (1/r)\partial/\partial\theta & \partial/\partial r-1/r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}\{u\} \tag{b}$$

其中$\{u\}$相似于题 3.10 中的式(e).由式(b)可得到[L][N]的最终结果为一个 3×8 矩阵，或

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0\\ \frac{N_1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial\theta} & \frac{N_2}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial\theta} & \frac{N_3}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_3}{\partial\theta} & \frac{N_4}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_4}{\partial\theta}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial\theta} & \frac{\partial N_1}{\partial r}-\frac{N_1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial\theta} & \frac{\partial N_2}{\partial r}-\frac{N_2}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_3}{\partial\theta} & \frac{\partial N_3}{\partial\theta}-\frac{N_3}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_4}{\partial\theta} & \frac{\partial N_4}{\partial\theta}-\frac{N_4}{r}\end{bmatrix} \tag{c}$$

注意对此单元 dV 变成 $dV=rd\theta dr$.

补充习题

3.28 假设

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4$$

使用如图 3-3 所示的一般坐标 x_i, y_i 推导一矩形单元的形状函数 N_i. 证明这些形状函数可以简化成在题 3.1 中导出的形式.

3.29 写出题 3.1 中式(b)的矩阵形式.

3.30 证明题 3.2 中的$[X]^{-1}$可由下式给出

$$\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \div 2A$$

其中 A 式三角形的面积

3.31 一三角单元有位于$(x_1 = 1, y_1 = 1)$, $(x_2 = 6, y_2 = 1)$和$(x_3 = 3, y_3 = 4)$的节点. 已计算出一函数在节点处的函数值为 $\phi_1 = 900$, $\phi_2 = 600$ 和 $\phi_3 = 1200$. 使用一三节点三角单元的插值函数计算 ϕ 在$(x = 3, y = 4)$处的值.

3.32 推导出对应式(3.2)的质量传输的变分函数. 延续题 3.4 中使用的一般步骤并用矩阵形式写出变分函数.

3.33 使用四节点矩形单元的形状函数推导包含有化学反应和速度项的质量传输的局部刚度矩阵.

3.34 使用一条二维单元求解题 2.18 中的一维质量传输问题.

3.35 构造在图 3-7 所示的大坝问题的节点坐标和连通数组.

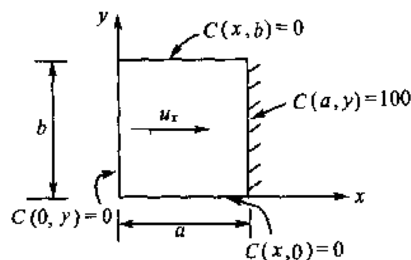
3.36 求解在图 3-19 所示空间中处于稳定状态下的质量传输问题.

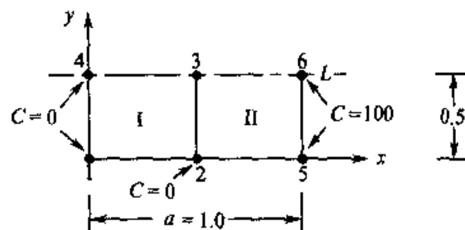
(a) 将空间划分成两个单元并利用如图 3-19 所示的沿着轴 $y = 0.5$ 的对称性求解在节点 3 处的 C.

(b) 将空间划分成所示的八个单元求解在所有单元处的 C.

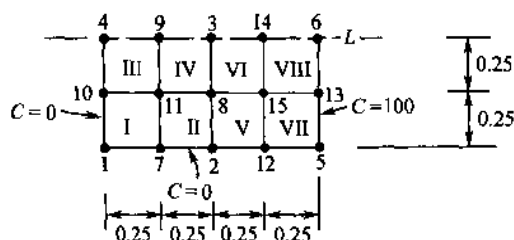
(c) 假设速度项 u_x 为零,求解恒态分布问题.

(d) 使用分离变量法解方程并比较有限元解和分析解. 假设 $D_x = D_y = D = 1$, $u_x = 1$, $a = b = 1$ 和 $u_y = K_r = 0$. 边界条件如图 3-19 所示. 再设沿着边 $x = a$ 有 $C_0 = 100$.





二单元模型



八单元模型

图 3-19

3.37 在图 3-3 中的矩形单元上有一个均匀变化的压强负载,如图 3-20 所示,并在单元坐标系统中可描述为 $T_x = p_x y/b$ 和 $T_y = 0$. 确定加载到节点 2 和 3 的压强分布.

3.38 平面弹性问题的解可经常通过求解用一个应力函数 ϕ 表示的偏微分方程得到. 对应应力的方程以及相应的定义为

$$\nabla^4\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

由分离变量法可得图 3-21 中的平板的应力函数为

$$\phi(x,y) = -\frac{q}{\alpha^2}\frac{\alpha y\sinh(\alpha a)\sinh(\alpha y) - [\sinh(\alpha a) + \alpha a\cosh(\alpha a)]\cosh(\alpha y)}{\alpha a + \sinh(\alpha a)\cosh(\alpha a)}\sin(\alpha x)$$

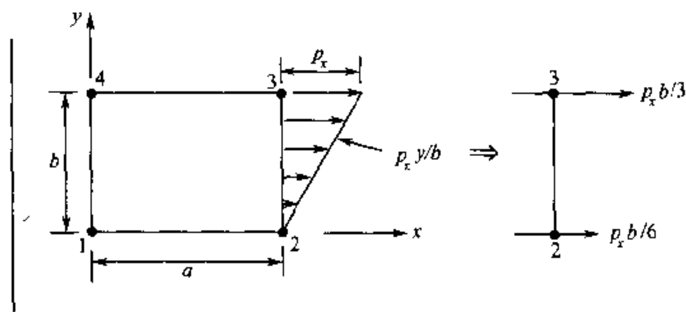


图 3-20

$$a=\frac{\pi}{L}$$

将正弦负载分割成梯形段(矩形和三角形)并使用题 3.10 和 3.37 中所述结果计算节点负载.由图 3-21所示的对称性,并假设金属板具有一个单位厚度,则得到一个位移和应力的八个单元的解.把你关于 σ_{yy}的解与分析解做一比较.假设 $L=16\text{in}$, $a=4$, $q=100\text{lb/in}$, $E=30(10)^6\text{psi}$ 和 $\upsilon=0.3$.

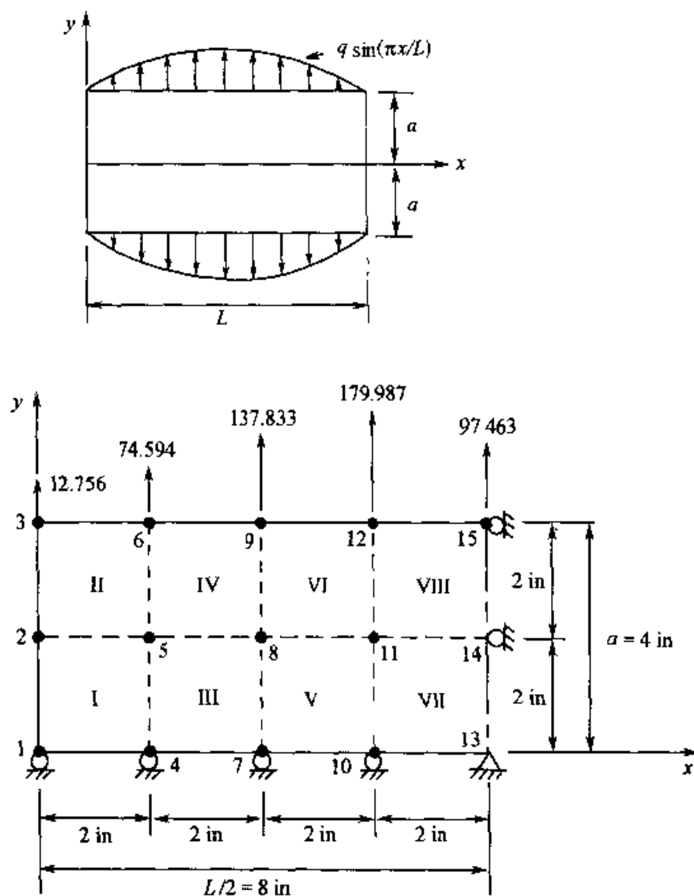


图 3-21

3.39　使用三节点三角形有限单元推导二维质量传输方程中有关对流项的局部刚度矩阵.

3.40　推导一平面弹性三节点三角形有限单元的局部刚度矩阵.

3.41　一定常均匀压强 P_x 分布于一个三角形有限单元介于在 x 坐标方向上节点 1 与 2 的一条边上.确定在每个节点上力的分布.

3.42　假设一均匀的体力作用于一个用三角形单元模拟的平面弹性问题.假定

$$\int_V [\mathrm{N}]^T f \mathrm{d}V = \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} t \mathrm{d}A$$

计算体力在每个节点上的分布.

3.43 将图 3-14 中的四节点单元分成由节点 1,2 和 3 以及由节点 1,3 和 4 定义的两个单元.计算位于 $x_Q=4$, $y_Q=3$ 的点源 Q 在每个节点上的分布.

3.44 假设 $x_Q=4.0$ 和 $y_Q=3.25$ 后对题 3.21 和 3.43 重新讨论.对四节点单元的结果和三节点的结果做一个比较.

3.45 假设在图 3-15 中的九节点单元有一个作用在由节点 1,5 和 2 定义的边上的定常流 q.计算流对每个节点的分布.

3.46 一个八节点的矩形单元有如下的编号顺序,角节点编号为 1,3,5,7,边中节点编号为 2,4,6,8,并且在解向量中角节点在前.推导对单元重新编号的变换矩阵,使得单元符合题 3.22 的图 3-15,并且角节点仍旧在解向量的前面(忽略第九个节点).

3.47 已经导出一个弹性问题的三节点三角单元,并把位移的全部 x 分量都放在解向量的前面,使得 $\{u\}^T=\{u_1\ \ u_2\ \ u_3\ \ v_1\ \ v_2\ \ v_3\}^T$.推导一个对位移重新排序的变换矩阵,使得位移符合更传统的编号顺序,$\{u\}^T=\{u_1\ \ v_1\ \ u_2\ \ v_2\ \ u_3\ \ v_3\}^T$.

3.48 计算图 3-22 所示的轴对称有限元模型单元Ⅲ的[B]矩阵.

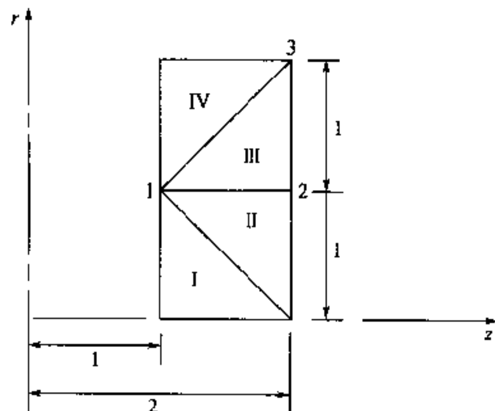


图 3-22

3.49 假设有题 3.27 中的形状函数,推导构成刚度矩阵的各单一矩阵的形式.用积分形式写出刚度矩阵.

补充习题答案

3.28

$$N_1=\frac{(x-x_2)(y-y_4)}{(x_1-x_2)(y_1-y_4)} \quad N_2=\frac{(x-x_1)(y-y_3)}{(x_2-x_1)(y_2-y_3)}$$

$$N_3=\frac{(x-x_4)(y-y_2)}{(x_3-x_4)(y_3-y_2)} \quad N_4=\frac{(x-x_3)(y-y_1)}{(x_4-x_3)(y_4-y_1)}$$

3.29

$$\phi=[N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix} \quad 或 \quad \phi=[\mathrm{N}]\{\phi\}$$

3.30 使用余子式方法反演[X](见第一章).

$$[\mathrm{X}]^{-1}=\frac{[\mathrm{C}]^T}{\det[\mathrm{X}]}$$

其中 $\det[\mathrm{X}]=2A$ 且[C]是余子式.

$$C_{11}=\begin{bmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{bmatrix}=x_2y_3-x_3y_2\quad C_{12}=(-1)\begin{bmatrix}1 & y_2\\ 1 & y_3\end{bmatrix}=y_2-y_3$$

用类似的方法计算其余各项.

3.31　使用式(g)和题 3.2 的式(i).

$$\phi=[21-(3)(3)-(3)(2)](900/15)+[-1+(3)(3)-(2)(2)](600/15)+[5+(5)(2)](1200/15)=920$$

3.32

$$J(C)=\int_A\frac{1}{2}\left[D_x\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2+D_y\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2+Cu_x\frac{\partial C}{\partial x}+Cu_y\frac{\partial C}{\partial y}+K_rC^2-2mC\right]t\,dx\,dy$$

$$J(C)=\int_A\left(\frac{1}{2}\{C\}^T[N]^T[L]^T[D][L][N]\{C\}+\frac{1}{2}\{C\}^T[N]^T[u][L][N]\{C\}+\frac{1}{2}\{C\}^T[N]^T[K_r][N]\{C\}-\{C\}^T[N]^Tm\right)t\,dx\,dy$$

其中

$$[D]=\begin{bmatrix}D_x & 0\\ 0 & D_y\end{bmatrix}\quad [u]=\begin{bmatrix}u_x & 0\\ 0 & u_y\end{bmatrix}\quad [K_r]=[K_r]$$

在题 3.4 中定义了四节点矩形单元的[L]和[N].

3.33　当题 3.5 中的式(e)中的 k_x 和 k_y 分别用 D_x 和 D_y 代替后流与在题 3.32 中给出函数的首项相同.对应传输流速项的刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}-(u_xb+u_ya)/6 & (2u_xb-u_ya)/12 & (u_xb+u_ya)/12 & (-u_xb+2u_ya)/12\\ -(2u_xb+u_ya)/12 & (u_xb-u_ya)/6 & (u_xb+2u_ya)/12 & (-u_xb+u_ya)/12\\ -(u_xb+u_ya)/12 & (u_xb-2u_ya)/12 & (u_xb+u_ya)/6 & (-2u_xb+u_ya)/12\\ -(u_xb+2u_ya)/12 & (u_xb-u_ya)/12 & (2u_xb+u_ya)/12 & (-u_xb+u_ya)/6\end{bmatrix}$$

由一个矩阵方程 $\int_A[N]^T[K_r][N]dA$ 计算对应化学反应项的刚度矩阵.矩阵相乘的形式为

$$\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\\ N_4\end{Bmatrix}[K_r][N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]$$

矩阵相乘后再积分,得

$$K_r(ab)\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36}\\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

3.35　节点坐标和连通性分别由表 3.9 和 3.10 给出

表 3.9

节点	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.0	3.0
3	0.0	6.0
4	6.0	0.0
5	6.0	3.0
6	6.0	6.0

续表

节点	X	Y
7	12.0	0.0
8	12.0	3.0
9	12.0	6.0
10	18.0	0.0
11	18.0	3.0
12	18.0	6.0

表 3.10

整体单元	局部单元			
	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4
Ⅰ	1	4	5	3
Ⅱ	2	5	6	3
Ⅲ	4	7	8	5
Ⅳ	7	10	11	8
Ⅴ	8	11	12	9

3.36. (a)有限单元,当 $u_x=0.0$ 时 $C_3=37.5$,当 $u_x=1.0$ 时 $C_3=28.125$.见(d)部分中的分析解.(b 和 c)内部节点的解由表 3.11 给出.(d)分离变量解如下,并且结果在表 3.11 中给出.

$$C(x,y)=\frac{4C_0e^{\alpha x}}{\pi e^{\alpha a}}\sum_{n_{\text{odd}}}^{\infty}\frac{\sinh(\beta x)}{n\sinh(\beta a)}\sin(ky)\quad \alpha=\frac{u_x}{2D}\quad k=\frac{n\pi}{b}\quad \beta=(\alpha^2+k^2)^{1/2}$$

注意对于 $u_x=0$ 的解相似于在题 3.6 中给出的结果.

表 3.11

节点	分析解		有限元解	
	速度=0.0	速度=1.0	速度=0.0	速度=1.0
3	25.000	19 116	27.857	20.945
8	18.203	13.924	19.286	14.309
9	9.541	6.398	10.092	6.468
11	6.797	4.558	7.154	4.605
14	54.053	47.231	58.479	50.935
15	43.203	37.779	50.703	44.197

3.37　使用题 3.12 中的式(b).令 $x=a$ 和 $N_1=N_4=0$,且 $T_y=0$.负载矢量变成

$$\int_S\{0\quad 0\quad N_2T_x\quad 0\quad N_3T_x\quad 0\quad 0\quad 0\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}S$$

计算得两个非零项为

$$\int_S N_2T_x\mathrm{d}S=\int_0^b\frac{b-y}{b}p_x\frac{y}{b}t\mathrm{d}y=\frac{p_xb}{6}$$

$$\int_S N_3T_x\mathrm{d}S=\int_0^b\frac{y}{b}p_x\frac{y}{b}t\mathrm{d}y=\frac{p_xb}{3}$$

全部的力为 $p_xb/2$,其中三分之一作用在节点 2,三分之二作用在节点 3.

3.38　因为在方程中 $\sin(\alpha x)$ 只是 x 的函数,所以关于 σ_{yy} 的分析解就等于应力函数乘以 $-\alpha^2$.计算出节点负载如图 3-21 所示.关于位移和应力的结果在表 3.12 中给出

表 3.12

节点	$u_x(\times 10^{-6})$	$u_y(\times 10^{-6})$	单元	x	y	有限元解			分析解
						σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{yy}
1	6.490	0.0	1	1	1	−0.588	23.705	0.931	19.332
2	5.555	0.541	2	1	3	0.588	21.793	1.111	20.054
3	2.506	0.914	3	3	1	−2.727	54.133	1.561	55.053
4	5.931	0.0	4	3	3	2.727	53.958	2.532	57.108
5	5.087	2.643	5	5	1	−5.142	79.574	1.222	82.393
6	2.180	5.153	6	5	3	5.142	80.544	1.736	85.469
7	4.573	0.0	7	7	1	−6.485	93.906	0.425	97.189
8	3.917	4.684	8	7	3	6.485	95.022	0.609	100.89
9	1.555	9.259							
10	2.495	0.0							
11	2.126	6.132							
12	0.810	12.090							
13	0.0	0.0							
14	0.0	6.648							
15	0.0	13.100							

3.39　计算类似于题 3.18 中的计算.

$$\begin{bmatrix} u_xb_1 + u_yc_1 & u_xb_2 + u_yc_2 & u_xb_3 + u_yc_3 \\ u_xb_1 + u_yc_1 & u_xb_2 + u_yc_2 & u_xb_3 + u_yc_3 \\ u_xb_1 + u_yc_1 & u_xb_2 + u_yc_2 & u_xb_3 + u_yc_3 \end{bmatrix} \frac{t}{6}$$

3.40　使用题 3.11 中的式(d)和题 3.19 中给出的[B].

$$\begin{bmatrix} b_1^2C_{11} + c_1^2C_{33} & b_1c_1C_{12} + b_1c_1C_{33} & b_1b_2C_{11} + c_1c_2C_{33} & b_1c_1C_{12} + b_2c_1C_{33} & b_1b_3C_{11} + c_1c_2C_{33} & b_1c_3C_{12} + b_3c_1C_{33} \\ & c_1^2C_{11} + b_1^2C_{33} & b_2c_1C_{12} + b_1c_2C_{33} & c_1c_2C_{11} + b_1b_2C_{33} & b_3c_1C_{12} + b_1c_3C_{33} & c_1c_3C_{11} + b_1b_3C_{33} \\ & & b_2^2C_{11} + c_2^2C_{33} & b_2c_2C_{12} + b_2c_2C_{33} & b_2b_3C_{11} + c_2c_3C_{33} & b_2c_3C_{12} + b_3c_2C_{33} \\ & \text{对称} & & c_2^2C_{11} + b_2^2C_{33} & b_3c_2C_{12} + b_2c_3C_{33} & c_2c_3C_{11} + b_2b_3C_{33} \\ & & & & b_3^2C_{11} + c_3^2C_{33} & b_3c_3C_{12} + b_3c_3C_{33} \\ & & & & & c_3^2C_{11} + b_3^2C_{33} \end{bmatrix} t \div 2A$$

3.41　两个节点都是总压强$(P_xt/2)(y_2 - y_1)$的一半.

3.42　代入形状函数的面积坐标并由面积积分对结果求数值积分.

3.43　点源位于由节点 1,2 和 3 定义的单元中,这样由节点 1,3 和 4 定义的单元将得不到任何分布. 使用题 3.14 中定义的形状函数并延续题 3.21 给出的分析方法. 注意 $x_Q = 4$ 和 $y_Q = 3$.

$$N_1 = \frac{15 - 3x_Q}{12} = \frac{3}{12}$$

$$N_2 = \frac{1 + 3x_Q - 4y_Q}{12} = \frac{1}{12}$$

$$N_3 = \frac{-4 + 4y_Q}{12} = \frac{8}{12}$$

分布是与形状函数的值相一致的.

3.44　点(4.00,3.25)位于节点 1 和 3 之间的对角线上. 由此知每个三角形都可以得到一半的点源. 对于由节点 1,2 和 3 定义的三角单元,可以用题 3.43 中的形状函数计算每个节点的分布, $N_1 = \frac{3}{12}$, $N_2 = 0$ 和 $N_3 = \frac{9}{12}$. 对由节点 1,3 和 4 定义的单元的形状函数为

$$N_1 - \frac{16 - 4x_Q}{12} = \frac{3}{12}$$

$$N_3 = \frac{-3 + 3x_Q}{12} = \frac{9}{12}$$

$$N_4 = \frac{-1 - 3x_Q + 4y_Q}{12} = 0$$

所以四分之一的源作用在节点 1,四分之三的源作用在节点 3,而在节点 2 和 4 上源的分布为零.

当 $x_Q = 3.00$ 和 $y_Q = 2.25$ 时,重复题 3.21 中分析(在局部单元坐标系)得到比率 $\{6.75/12 \quad 2.25/12 \quad 0.75/12 \quad 2.25/12\}^T Q(x_Q, y_Q)$. 比较此种情况下的结果可看出四节点单元将源分布到所有节点,而三角形单元的公式化中将忽略两个节点.

3.45 在题 3.22 中给出了形状函数. 分析表示成公式为

$$\int_0^a \{N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad N_5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T q\mathrm{d}x,$$

积分是沿着节点 1,5 和 2 的线段上并有 $y = 0$. 代入形状函数并积分有

$$\{aq/6 \quad aq/6 \quad 0 \quad 0 \quad 2aq/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T,$$

即六分之一的流作用在每个角节点上,三分之二的流作用在边中节点上.

3.46

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix}$$

3.47

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

3.48 用节点 1,2 和 3 描述单元Ⅲ; $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = -1, b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = 0, c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 1$, $r_{avg} = (1+2+2)/3 = \frac{5}{3}$, $z_{avg} = (1+1+2)/3 = \frac{4}{3}$, $A = \frac{1}{2}$.

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

3.49

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ (1/r)\partial/\partial\theta \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$= \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial r & \partial N_2/\partial r & \partial N_3/\partial r & \partial N_4/\partial r \\ (1/r)\partial N_1/\partial\theta & (1/r)\partial N_2/\partial\theta & (1/r)\partial N_3/\partial\theta & (1/r)\partial N_4/\partial\theta \end{bmatrix}$$

$$\int_A ([B]^T[D][B]\{C\} + [N]^T[u][B]\{C\} + [N]^T[k_r][N]\{C\}) t r d r d\theta$$

其中[D], [u]和$[k_r]$有相似于题 3.32 中的定义.

第四章　梁和桁架上的有限元方法

4.1 引言

梁有限元与矩阵的结构分析直接相关.另外,位移法或刚度法的概念也应用于结构理论的研究之中.从历史上讲,这些结构分析的方法是有限元方法的始祖.作为梁有限元方法的入门知识,本章将重点介绍梁有限元方法和普通材料力学教科书中基本梁理论之间的联系.熟练掌握矩阵结构分析的读者可以直接阅读下一章的内容.然而,对于不太熟悉梁分析的读者来说,本章是学习梁有限元的入门知识.

梁有限元方法与先前几章介绍的有限元方法的主要区别是控制微分方程的阶数.梁理论研究的是四阶常微分方程,而前几章中的微分方程是二阶的.因而有以下基本比较:第二章中的二阶常微分方程需要有两个边界条件来描述物理状况,而四阶方程则需要有四个边界条件.由于边界条件的用法往往要受到主要应用于梁和桁架静不定结构理论的制约,使情况变得混淆不清.

在讨论梁有限元的教科书中,通常从带有轴向荷载的直杆拉伸单元开始,介绍能够应用于桁架分析的有限元理论.本章将着重考虑受横向荷载作用的梁.而关于桁架分析的内容,请读者参阅涵盖更深内容的教科书.第二章中得到的直杆拉伸有限元将包含在稍后于本章中构造的受轴向荷载作用的梁有限元之中.

4.2 控制微分方程

二维空间中梁发生挠度的控制微分方程的推导过程可以查阅材料力学教科书.如图 4-1 所示的梁,关于梁的挠度 $v(x)$的控制方程写为

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} = w(x) \tag{4.1}$$

弹性模量 E 和横截面面积I 的惯性矩可以为轴向坐标x 的函数,但在有限元方程中 EI 被假设为任意给定单元中的常量.假设此式中从外部作用于梁的荷载 $w(x)$为垂直向上的正应力.一般在推导方程(4.1)的过程中,假设 y 轴为向下的正向量.如果不是为了讨论方便,取哪个方向是无关紧要的.方程(4.1)往往用于研究梁分析的小挠度理论,该理论对梁的坡度进行了

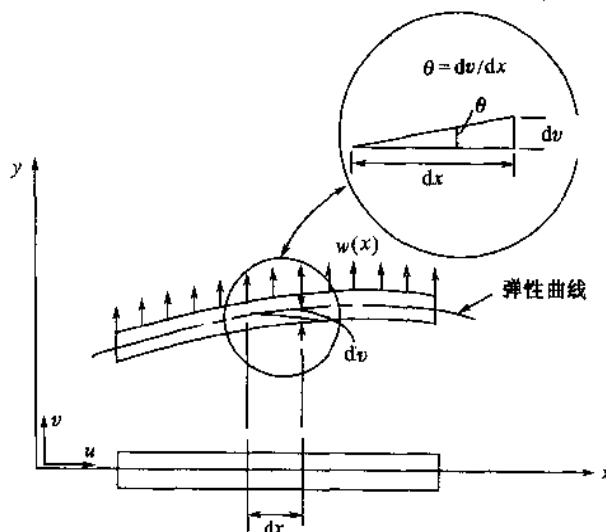


图 4-1　梁的横向荷载

限制,而没有限制梁的挠度.但由于没有关于“与哪个量相比为小量”的具体数学描述,小挠度可算是一个错误的名词.挠度的一阶导数称为坡度 θ.如图 4-1 所示,如果 $\tan\theta \approx \sin\theta \approx dv/dx$,坡度 θ 为小量.因而在基本的梁理论中,假设 $dv/dx=\theta$ 是第一重要的.梁在受荷载作用并发生偏移之前的纵向轴线对应于坐标系中的 x 轴.梁在发生偏移后的纵向轴线称为位移梁的弹性曲线.坡度可以进一步定义为梁在发生偏移之前的原始轴线与偏移的弹性曲线之间的夹角.构成基本梁理论的这些假设导出了梁分析的线性理论.与基本假设一样,该理论的精确性是不能违背的.挠度的每一个导数都有一个特定的名词,以下是梁分析的重要关系式:

$$
\begin{aligned}
& v(x) && \text{(偏移)} \\
& \frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) && \text{(坡度)} \\
& EI\frac{d^2v(x)}{d^2x} = M(x) && \text{(相对于 } x \text{ 轴弯曲的弯曲矩)} \\
& EI\frac{d^3v(x)}{d^3x} = \frac{dM(x)}{dx} = V(x) && \text{(横向切变)} \\
& EI\frac{d^4v(x)}{d^4x} = \frac{dV(x)}{dx} = w(x) && \text{[局部:见式(4.1)]}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

微分方程(4.2)是根据经典的梁符号对流而得到的,而梁有限元是基于桁架节点符号对流而得到的.题 4.1 讨论了梁符号对流,它对成功地建立推导梁有限元的关系式是必要的.

4.3 梁分析的位移方法

位移法通常是指刚性法,它要先于计算机在结构分析中的应用.位移法的始祖是三弯矩方程和转角-挠度法.实际上,由于大型联立方程组的实际求解需要和现代刚度法的不断发展,计算机的广泛应用已使上述方法得到了成功的发展.

对于二维梁结构,刚度法用于求解梁在端点处的位移和旋度(坡度).它们是由方程(4.2)给出的前两个物理量.梁在端点处的位移和旋度伴随着力的作用和弯矩的作用.因而可以写出能够利用端点处的位移和旋度表示的方程,并通过求解得到力或力矩的数值.由于有四个未知的端点处的位移和旋度以及四个端点处的力和弯矩,因此可以得到含有四个未知量、四个方程的方程组.首先,假设梁的两端固定,这种梁称为固定梁.固定梁在外部荷载作用下的反作用力是可以计算的(见题 4.3 和表 4-1).每个梁对应着一个由四个方程组成的方程组,构成全连续结构,这一过程如题 4.4 所述.位移法在梁结构分析中的应用要比前面的内容更复杂一些,读者们通过学习题 4.4 和 4.5 可以进一步理解这一技巧.通常情况下,在构造剪切力和力矩图之前,梁分析是不全面的.有关如何构造剪切力和力矩图的理论,本书将不进行讨论,请大家参阅材料力学方面的书籍.无论如何,本章后面解决的许多问题中包含了剪切力和力矩图.

4.4 梁有限元

采用有限元格式的二维梁分析与矩阵的结构分析是一致的.推导刚度矩阵的基础是确定符合控制微分方程及固定梁边界条件的形状函数.三次位移函数可以假设为如下形式

$$v(x) = a_v + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \tag{4.3}$$

并计算出满足边界条件的 a_i,则可以由三次函数的形式推导出形状函数.另外,由对应于梁挠度的势能函数所满足的条件,可以推得刚度矩阵.由式(3.13)定义的广义变分函数可以用来定义推导梁有限元模型的适宜的势能函数.

三次多项式形式的形状函数必须满足梁两端的位移条件和旋度条件.为推导上述形状函数,自然选择 Hermite 插值多项式作为其基本形式.因此,形状函数的形式可以写为(Scheid, 1988)

$$N_i = \sum_{i=0}^{n} U_i(x)v_i + \sum_{i=0}^{n} W_i(x)\frac{dv_i}{dx} \tag{4.4}$$

表 4-1　等价节点荷载

荷载	等价节点荷载
P，A，B，$L/2$，$L/2$	$R_A = P/2$，$R_B = P/2$，$M_A = PL/8$，$PL/8 = M_B$
P，A，B，a，b，L	R_A，R_B，M_A，M_B；$M_A = Pab^2/L^2$；$M_B = Pba^2/L^2$；$R_A = (Pb^2/L^3)(3a+b)$；$R_B = (Pa^2/L^3)(a+3b)$
w，A，B，L	$R_A = wL/2$，$R_B = wL/2$，$M_A = wL^2/12$，$M_B = wL^2/12$
w，A，B，L	$R_A = 3wL/20$，$R_B = 7wL/20$，$M_A = wL^2/30$，$M_B = wL^2/20$
w，A，B，a，b，L	R_A，R_B，M_A，M_B；$R_A = (wa/2L^3)(a^3 - 2a^2L + 2L^3)$；$R_B = (wa^3/2L^3)(2L - a)$；$M_A = (wa^2/12L^2)(3a^2 - 8aL + 6L^2)$；$M_B = (wa^3/12L^2)(4L - 3a)$
w，A，B，L	$R_A = wL/4$，$R_B = wL/4$，$M_A = 5wL^2/96$，$M_B = 5wL^2/96$
M_0，A，B，a，b，L	$R_A = 6M_0ab/L^3$；$R_B = 6M_0ab/L^3$；$M_A = (M_0b/L^2)(3a - L)$；$M_B = M_0a/L^2(3b - L)$

这里 v_i 为点 x_i 处的挠度，$\mathrm{d}v_i/\mathrm{d}x$ 为点 x_i 处的旋度(坡度). 上述多项式的阶数为 $2n+1$，而对于三次方程而言 $n=1$. $U_i(x)$和 $W_i(x)$是具有如下性质的多项式

$$U_i(x) = \left[1 - 2\frac{\mathrm{d}L(x_i)}{\mathrm{d}x}(x - x_i)\right][L_i(x)]^2 \tag{4.5}$$

$$W_i(x) = (x - x_i)[L_i(x)]^2 \tag{4.6}$$

函数 $L_i(x)$及其导数将在题 4.9 中定义. 从而建立了梁有限元模型和矩阵结构分析的相似性.

仅仅包括剪切力和弯矩的二维梁有限元模型无法有效地应用于没有轴向力的框架形问题作用于杆或梁上的轴向力的有限元模型已在第二章中进行了介绍. 只要增加两个自由度——梁两边的轴向形变，基本的梁有限元模型就可以修正为包含轴向力的模型，具体推导过程详见题 4.11. 在将梁有限元分析应用于桁架有限元分析之前，与剪切力和轴向力的混合作用力的

矩阵变换相同,必须事先知道坐标变换的形式.

4.5 矩阵变换

平面弹性问题中描述边界条件的矩阵变换已在第三章中进行了讨论.利用方程(3.14)和(3.15)的矢量变换,可以将梁有限元模型从(ξ,η)局部坐标系中的形式变换为(x,y)整体坐标系中的形式.题3.23给出的应用事例描述了(ξ,η)局部坐标系下位移边界条件的表示形式,而桁架类问题的应用则有点相反.题4.12描述了将梁有限元结构的模型从(ξ,η)局部坐标系中的形式变换为(x,y)整体坐标系中的形式的坐标变换,利用该变换可以指定(x,y)坐标系中的边界条件.

例题详解

4.1 在推导梁有限元刚度矩阵所满足的方程时,图4-2所示的梁问题是一类主要问题(在$x=0$处施加正的节点旋度),它也用于解释最终的梁分析结果.试由微分方程(4.1)求解图4-2中固定梁的反作用剪切力和反作用力矩.

解 ☞ 在这种情况下,用速记符号写出的微分方程为

$$EIv^{\mathrm{IV}}=w=0 \qquad 或 \qquad v^{\mathrm{IV}}=0 \tag{a}$$

图4-2所示的梁是静不定结构.该结构有四个未知的外部反作用力,却仅有两个从静态结构得到的有效方程.从而对另外的两个外部反作用力,需要补充两个边界条件.这样才能求得微分方程的解.对式(a)进行积分,有

$$v^{\mathrm{III}}=C_1 \tag{b}$$

点$x=0$处的一个边界条件是未知的剪切反作用力R_1.利用式(4-2),有$EIv^{\mathrm{III}}(0)=V=R_1$.实际上,当$0\leqslant x\leqslant L$时,这个应用中的剪切力$V$为常数.代入式(b)中,有

$$v^{\mathrm{III}}=\frac{R_1}{EI} \tag{c}$$

再进行一次积分,有

$$v^{\mathrm{II}}=R_1\frac{x}{EI}+C_2 \tag{d}$$

这是一个边界条件,利用图4-2,有$EIv^{\mathrm{II}}(0)=-M_1$.代入式(d)并解出$C_2$,有

$$v^{\mathrm{II}}=R_1\frac{x}{EI}-\frac{M_1}{EI} \tag{e}$$

讨论符号对流是为了使不熟悉梁理论的读者能对其有所了解.梁符号对流的提出很可能使方程组(4.2)中的后三个方程,也就是荷载w、横向剪切力V和弯矩M之间的应用关系,得到了成功的运用.梁的符号对流理论(求解方程(4.1)的符号对流)如图4-2(b)所示.假设作用在梁单元两端的弯矩为正值并使得梁的顶部受到压缩.假设正剪切力向下作用于梁单元的顶端;类似的,假设正剪切力向上作用于梁单元的另一端.不难看到,符号对流的方向和x轴的正向相同,都是向右的方向.而y轴的正向既可以为向上的方向,也可以为向下的方向.读者必须记住的是,当y轴的正方向向上时,方程(4.1)中作用于梁上向下的荷载力为负值.因而当作为式(d)中的边界条件时,图4-2中施加在$x=0$处的力矩M_1为负值.

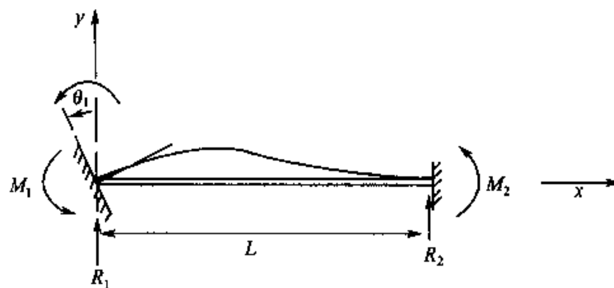
节点符号对流应用于矩阵结构分析和梁有限元之中.假设转动节点的力矩或支撑力沿反时针方向是正的,而且该正向力沿y轴的正向向上作用于节点.该问题以及后面的梁问题都将假设力和力矩是相应于节点符号对流的正值.

对式(e)进行两次积分,可以得到关于坡度的方程和关于挠度的方程

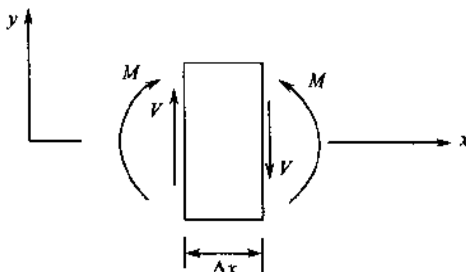
$$v^{\mathrm{I}}=\frac{R_1x^2}{2EI}-\frac{M_1x}{EI}+C_3 \tag{f}$$

$$v=\frac{R_1x^3}{6EI}-\frac{M_1x^2}{2EI}+C_3x+C_4 \tag{g}$$

用于计算C_3和C_4的最方便的边界条件是在$x=0$处给出的$v(0)=0$和节点旋度$v^{\mathrm{I}}(0)=\theta_1$.将它们



(a) 在x=0处施加旋度θ_1



(b) 剪切力和力矩的符号对流

图 4-2

代入式(f)和式(g),得 $C_3=\theta_1$ 和 $C_4=0$.将边界 $x=L$ 处的条件 $v^{\mathrm{I}}(L)=0$ 和 $v(L)=0$ 代入式(f)和式(g)得到两个方程,由此可以解得 R_1 和 M_1 为

$$R_1=\frac{6EI\theta_1}{L^2} \quad 和 \quad M_1=\frac{4EI\theta_1}{L} \tag{h}$$

另外还有两个方程用来求解 R_2 和 M_2.熟悉静力学的读者将发现 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M_z=0$.另外,也可以仅将 $EIv^{\mathrm{III}}(L)=V=R_2$ 代入式(c),并将 $EIv^{\mathrm{II}}(L)=M_2$ 代入式(e),从而计算得到

$$R_2=-\frac{6EI\theta_1}{L^2} \quad 和 \quad M_2=\frac{2EI\theta_1}{L} \tag{i}$$

完整的静力学方程是(见图 4-2)

$$\sum F_y=R_1+R_2=0 \quad 和 \quad \sum M_z(0)=M_1+M_2+R_2L=0$$

4.2 在推导梁有限元刚度矩阵所满足的方程时,图 4-3 所示的在 $x=0$ 处有正节点位移的梁问题是一类主要问题.试利用方程(4.1)求解如图 4-3 所示的固定梁的反作用剪切力和反作用力矩.注意,假设反作用力 R_2 是向下的.

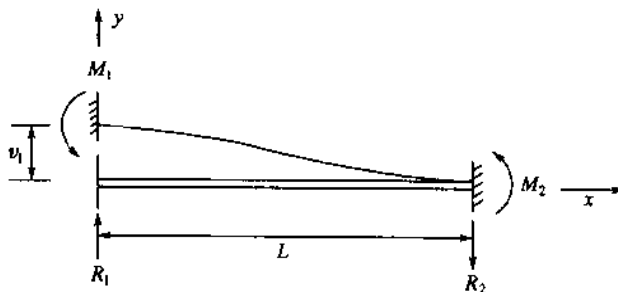


图 4-3　$x=0$ 处有节点位移

解 ☞ 对式(4.1)进行两次积分,得到的结果为

$$v^{\mathrm{IV}}=0$$

$$v^{\mathrm{III}}=C_1 \tag{a}$$

$$v^{\mathrm{II}}=C_1x+C_2 \tag{b}$$

相应的边界条件是 $EIv^{\mathrm{III}}(0)=R_1$ 和 $EIv^{\mathrm{II}}(0)=-M_1$.将它们代入式(a)和式(b),并求出式中的常数,有

$$v^{\mathrm{II}} = R_1\frac{x}{EI} - \frac{M_1}{EI} \tag{c}$$

再进行一次积分,有

$$v = \frac{R_1x^3}{6EI} - \frac{M_1x^2}{2EI} + C_3x + C_4 \tag{d}$$

其边界条件为 $v^{\mathrm{I}}(0)=0$ 和假设的节点位移 $v(0)=v_1$.经计算,式中的常数为 $C_3=0$ 和 $C_4=v_1$.余下的边界条件 $v^{\mathrm{I}}(L)=0$ 和 $v(L)=0$ 可以用在式(d)和式(e)中,并得到两个方程.从中求出 R_1 和 M_1,有

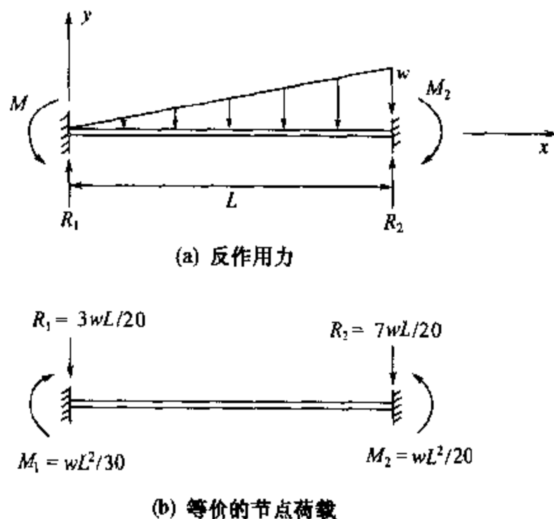
$$R_1 = \frac{12EIv_1}{L^3} \quad 和 \quad M_1 = \frac{6EIv_1}{L^2} \tag{e}$$

由静力学方程求得 R_2 和 M_2,有

$$R_2 = \frac{12EIv_1}{L^3} \quad 和 \quad M_2 = \frac{6EIv_1}{L^2} \tag{f}$$

上述结果概况在表 4-1 中.

4.3 如图 4-4 所示,固定梁受到连续荷载 $w(x)=-wx/L$ 的作用,计算其反作用剪切力和反作用力矩.



(a) 反作用力

(b) 等价的节点荷载

图 4-4

解 ☞ 四阶方程(4.1),可以写作

$$EIv^{\mathrm{IV}} = -\frac{wx}{L}$$

将控制方程积分两次,得到

$$EIv^{\mathrm{III}} = -\frac{wx^2}{2L} + C_1 \tag{a}$$

$$EIv^{\mathrm{II}} = -\frac{wx^3}{6L} + C_1x + C_2 \tag{b}$$

由边界条件 $EIv^{\mathrm{III}}(0)=R_1$ 和 $EIv^{\mathrm{II}}(0)=-M_1$ 计算出的积分常数为 $C_1=R_1$ 和 $C_2=-M_1$.将其代入式(a)和式(b),并再积分两次,有

$$EIv^{\mathrm{I}} = -\frac{wx^4}{24L} + \frac{R_1x^2}{2} - M_1x + C_3 \tag{c}$$

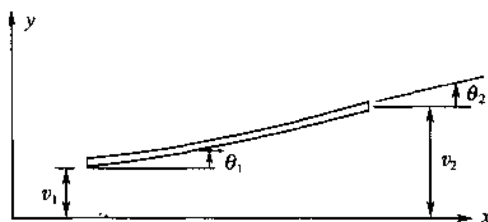
$$EIv = -\frac{wx^5}{120L} + \frac{R_1x^3}{6} - \frac{M_1x^2}{2} + C_3x + C_4 \tag{d}$$

由边界条件 $v^{\mathrm{I}}(0)=0$ 和 $v(0)=0$,可以求得 $C_3=C_4=0$.另外,边界条件 $v^{\mathrm{I}}(L)=0$ 和 $v(L)=0$ 可以用来构造计算 R_1 和 M_1 的两个方程:

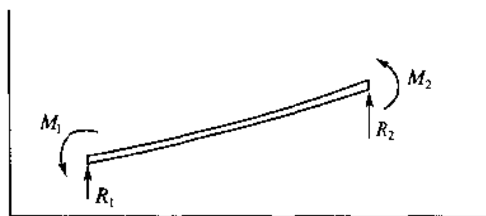
$$-\frac{wL^3}{24}+\frac{R_1L^2}{2}-M_1L=0 \quad 和 \quad -\frac{wL^4}{120}+\frac{R_1L^3}{6}-\frac{M_1L^2}{2}=0$$

求解该方程组，得到 $M_1=wL^2/30$ 和 $R_1=3wL/20$. 由静力学方程可求得 $M_2=wL^2/20$ 和 $R_2=7wL/20$. 图 4-4 所示的结果是由外部荷载引起的反作用力. 当这些结果应用于本章后边的应用示例时，反作用力的方向将为相反方向并用等价节点荷载代替梁受到的外部荷载.

4.4 图 4-5(a)中的梁和符号可以用来确定图 4-5(b)所示受两端力和力矩作用的梁在端点处的位移和旋度. 试构造将图 4-5(b)中的每一个作用力或力矩与图 4-5(a)中的位移和旋度相联系的由四个方程组成的方程组.



(a) 位移和旋度



(b) 作用力和力矩

图 4-5

解 ☞ 首先，需要写出联系 R_1 与图 4-5(a)中的每一个位移和旋度的方程，即

$$R_1=f(v_1,\theta_1,v_2,\theta_2) \tag{a}$$

在将边界条件赋值给梁问题之前，假设梁的两个支承点是固定的. 根据梁左端发生的位移，可以计算出式(a)中的函数 $f(v_1)$，题 4.2 完成了其分析过程，得到了有效的结果. 类似的，R_1 受梁左端的旋度 $f(\theta_1)$ 的影响，其结果由题 4.1 给出. 题 4.15 和题 4.16 中计算了其余的函数. 因此，式(a)中的函数写为

$$R_1=\frac{12EIv_1}{L^3}+\frac{6EI\theta_1}{L^2}-\frac{12EIv_2}{L^3}+\frac{6EI\theta_2}{L^2} \tag{b}$$

类似的，有

$$M_1=f(v_1,\theta_1,v_2,\theta_2)$$

利用题 4.1、4.2、4.15 和 4.16 给出的结果，该函数重新表示为

$$M_1=\frac{6EIv_1}{L^2}+\frac{4EI\theta_1}{L}-\frac{6EIv_2}{L^2}+\frac{2EI\theta_2}{L} \tag{c}$$

对梁的右端进行类似的计算，求得的反作用力为

$$R_2=-\frac{12EIv_1}{L^3}-\frac{6EI\theta_1}{L^2}+\frac{12EIv_2}{L^3}-\frac{6EI\theta_1}{L^2} \tag{d}$$

$$M_2=\frac{6EIv_1}{L^2}+\frac{2EI\theta_1}{L}-\frac{6EIv_2}{L^2}+\frac{4EI\theta_2}{L} \tag{e}$$

将式(b)至式(e)写成较为紧凑的矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

或

$$\{f\}=[K]\{v\} \tag{g}$$

这里$[K]$为刚度矩阵,$\{f\}$是与计算出的端点剪切力和力矩相同的荷载力矩阵(依赖于梁受到的外部荷载),而$\{v\}$是对应于梁端点处的未知位移和旋度的位移矩阵.

如果给出了梁上相应于节点位移和旋度的全部荷载力,可以直接由方程(g)计算梁的反作用力.相应的分析过程分两部分完成.第一步,将与梁所受荷载力等价的固定节点的作用力应用于梁的节点处,变成方程(f)左边的式子;第二步,将等价的节点力和力矩的和,加上由节点的位移和旋度引起的力、力矩,计算出实际的反作用力.问题4.5针对一个简单梁,阐述了这一过程.

4.5 图4-6中的梁是静定结构,反作用力R_A和R_B的计算方法应用了基本静力学方程.无论如何,这个梁结构将用来说明位移法的基本思想.试采用位移法计算图4-6中梁的反作用力.

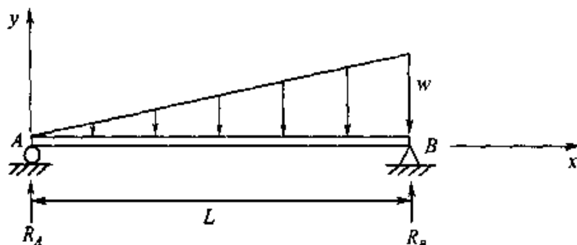


图4-6

解 ☞ 假设梁的两端固定,并计算等价的节点荷载用以表示均匀变化的荷载力.由题4.3计算出的结果或由表4.1,可以给出等价的节点荷载.将其代入题4.4中的式(f),计算出的节点旋度为

$$\begin{Bmatrix} -3wL/20 \\ -wL^2/30 \\ -7wL/20 \\ wL^2/20 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

方程(a)是固定梁的精确模型,因为如果从中解出所有的位移和旋度,它们的计算值都将为零.利用边界条件$v(0)=v(L)=0$,固定梁问题看起来与已经分析过的简单梁问题相同.从方程(a)中消去已知边界条件,得到矩阵方程

$$\begin{Bmatrix} -wL^2/30 \\ wL^2/20 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

解方程组(b),得到每个点处的旋度值为

$$\theta_1 = -\frac{7wL^3}{360EI} \quad 和 \quad \theta_2 = \frac{wL^3}{45EI} \tag{c}$$

用实际节点荷载代替作用在梁上的荷载力,加上由节点旋度引起的反作用力,计算出最后的反作用力:

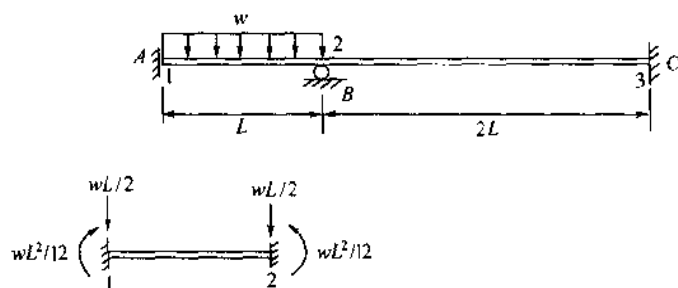
$$\begin{Bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -7wL^3/36EI \\ 0 \\ wL^3/45EI \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3wL/20 \\ wL^2/30 \\ 7wL/20 \\ -wL^2/20 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

求解矩阵方程,得到最终的结果

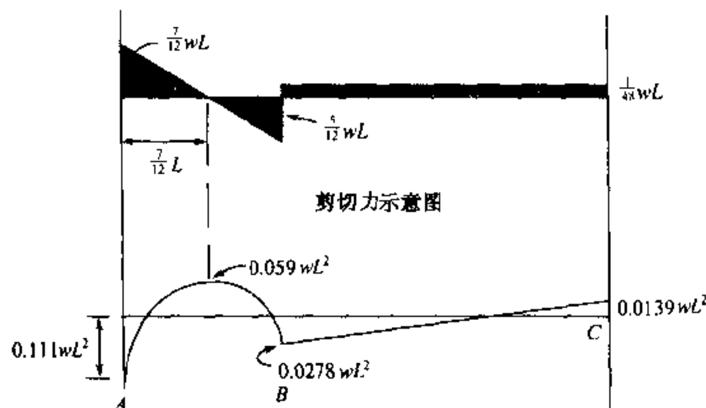
$$R_A = \frac{wL}{6} \qquad R_B = \frac{wL}{3} \quad M_A = M_B = 0$$

4.6 图4-7(a)所示的二跨度梁的两端固定,并受到界于两个端点之间的简单支承点的支撑,梁可以在支承点转动.试计算简单支承点处的旋度以及所有支承点处的反作用力,并作出相应的剪切力和力矩示意图.

解 ☞ 该结构中将用到两个局部单元并由其组合成整体刚度矩阵.在支承点2处,梁的两段具有公共的旋度和位移,并且两个梁单元在该支承点发生连接.利用题4.4中的式(f)作为模型,首先构造局部刚度矩阵.与梁1-2上的均匀荷载等价的节点荷载由表4.1得到.



(a) 梁1-2上的等价节点荷载



(b) 力矩示意图

图 4-7

梁 1－2：

$$\begin{Bmatrix} -wL/2 \\ -wL^2/12 \\ -wL/2 \\ wL^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

梁 2－3：

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(2L)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6(2L) & -12 & 6(2L) \\ 6(2L) & 4(2L)^2 & -6(2L) & 2(2L)^2 \\ -12 & -6(2L) & 12 & -6(2L) \\ 6(2L) & 2(2L)^2 & -6(2L) & 4(2L)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

这两个局部刚度矩阵通过 v_2 和 θ_2 组合成一个 6×6 阶的整体刚度矩阵. 每个局部刚度矩阵都定义在矩阵(c)中，它们的连接由组合在中间框内的矩阵元素所表示.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12/8 & -6L+12L/8 & -12/8 & 12L/8 \\ 6L & 2L^2 & -6L+12L/8 & 4L^2+16L^2/8 & 12L/8 & 8L^2/8 \\ 0 & 0 & -12/8 & -12/8 & 12/8 & -12/8 \\ 0 & 0 & 12L/8 & 8L^2/8 & -12L/8 & 16L^2/8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} -wL/2 \\ -wL^2/12 \\ -wL/2 \\ wL^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

图 4-7 中梁的边界条件为 $v_1=v_2=v_3=\theta_1=\theta_3=0$. 因此方程组(c)化简为具有一个方程和一个未知量 θ_2 的方程. 具体地,删去方程组(c)中相应于零边界条件的所有行和列,得到的结果为

$$\frac{EI}{L^3}(4L^2+2L^2)\theta_2=\frac{wL^2}{12} \quad 或 \quad \theta_2=\frac{wL^3}{72EI} \tag{d}$$

每个跨度上的解必须由该跨度所对应的局部刚度矩阵进行单独计算. 跨距 1-2 上的反作用力为 V_A、V_B、M_A 和 M_B. 其刚度矩阵与式(a)相同,相应的计算格式为

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_{B1} \\ M_B \end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ wL^3/72EI \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} wL/2 \\ wL^2/12 \\ wL/2 \\ -wL^2/12 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

经乘法计算,得到

$$V_A=R_A=\frac{7wL}{12} \quad V_{B1}=\frac{5wL}{12} \quad M_A=\frac{wL^2}{9} \quad M_B=-\frac{wL^2}{36}$$

这里需要对记号 V_{B1} 作些补充说明. 支承点 B 处总的反作用力是由梁 1-2 在点 2 处的端点剪切力和梁 2-3 在点 2 处的端点剪切力相加而组成的,因而有 $R_B=R_{B1}+R_{B2}$.

类似的,刚度矩阵(b)可以用来计算梁 2-3 上的剪切力和力矩.

$$\begin{Bmatrix} V_{B2} \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5L & -1.5 & 1.5L \\ 1.5L & 2L^2 & -1.5L & L^2 \\ -1.5 & -1.5L & 1.5 & -1.5L \\ 1.5L & L^2 & -1.5L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ wL^3/72EI \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

$$V_{B2}=\frac{wL}{48} \quad V_C=R_C=-\frac{wL}{48} \quad M_B=\frac{wL^2}{36} \quad M_C=\frac{wL^2}{72} \quad R_B=V_{B1}+V_{B2}$$

内部支承点在相邻跨距上的弯矩总是数值相等、符号相反的,这就说明了梁在节点处处于平衡状态,如节点 B. 由刚度分析得到的弯矩必须从节点符号对流转化为梁符号对流,从而构造出剪切力和力矩示意图. 回顾关于梁符号对流的图 4-2,注意到 M_A 的节点符号对流形式是逆时针方向的,而其梁符号对流形式是负力矩. 类似的,如果采用梁符号对流形式,M_B 是负力矩,而 M_C 是正力矩. 剪切力和力矩表示在图 4-7(b)之中.

4.7 图 4-8(a)所示的二跨度梁在支承点 A 和 B 可以自由转动,并固定在节点 C 处. 试计算支承点 A 和 B 处的旋度以及所有支承点处的反作用力,并作出剪切力和力矩的示意图.

解 ☞ 除了支承点 A 可以自由转动以外,该结构与题 4.6 中的结构是一致的. 这里有两个未知量 θ_1 和 θ_2. 其刚度矩阵与题 4.6 中的式(a)至式(c)是相同的,梁的边界条件为 $v_1=v_2=v_3=\theta_3=0$. 于是题 4.6 中的方程组(c)化简为具有二个方程和二个未知量的方程组:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -wL^2/12 \\ wL^2/12 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

求解方程组(a),得到 $\theta_1=-wL^3/30EI$ 和 $\theta_2=wL^3/40EI$. 节点 1 沿顺时针方向旋转,节点 2 沿逆时针方向旋转.

利用题 4.6 中式(a)给出的刚度矩阵,构造的求解梁 1-2 端点处反作用力的矩阵方程为

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_{B1} \\ M_B \end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -wL^3/30EI \\ 0 \\ wL^3/40EI \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} wL/2 \\ wL^2/12 \\ wL/2 \\ -wL^2/12 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

计算得到的反作用力为

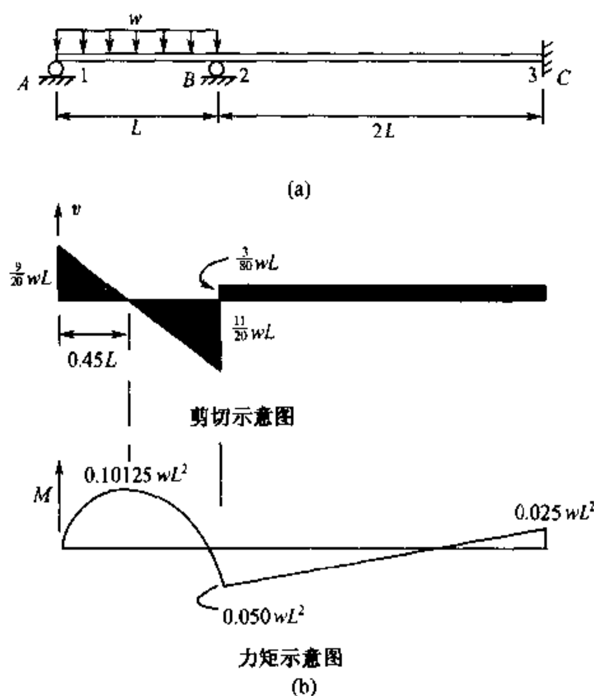


图 4-8

$$V_A = R_A = \frac{9wL}{20} \quad V_{B1} = \frac{11wL}{20} \quad M_A = 0 \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$$

类似的，题 4.6 中的式(b)可以用来计算梁 2-3 上的反作用力：

$$\begin{Bmatrix} V_{B2} \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5L & -1.5 & 1.5L \\ 1.5L & 2L^2 & -1.5L & L^2 \\ -1.5 & -1.5L & 1.5 & -1.5L \\ 1.5L & L^2 & -1.5L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ wL^3/40EI \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

$$V_{B2} = \frac{3wL}{80} \quad V_C = R_C = -\frac{3wL}{80} \quad M_B = \frac{wL^2}{20} \quad M_C = \frac{wL^2}{40} \quad R_B = V_{B1} + V_{B2}$$

剪切力和力矩表示在图 4-8(b)之中.

4.8　图 4-9 所示的梁结构往往被称作支撑悬臂梁. 试计算旋度 θ_1 和 θ_2 以及挠度 v_1，然后计

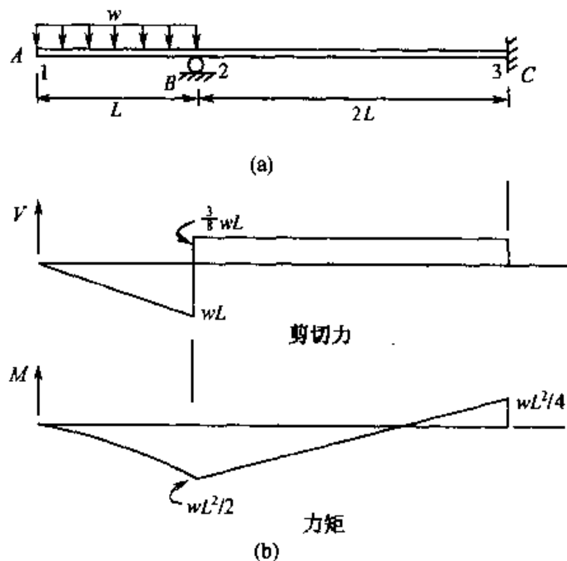


图 4-9

算点 B 和点 C 处的反作用力.并作出剪切力和力矩示意图.

解 ☞ 除了边界条件不同以外,该梁结构与题 4.6 中的结构是类似的.从 A 到 B 的跨距可以自由地转动或偏转,只要对问题 4.6 中的整体矩阵表达式(c)给出正确的边界条件,就可以进行具体分析.在矩阵结构分析理论中,伸出来的部分(从 A 到 B)可以用作用在点 B 处的等价的剪切力和力矩来代替.这里介绍的方法与计算机应用中使用的方法是一致的,只不过需要给出正确的边界条件而已.

梁的矩阵形式为题 4.6 中的式(c),边界条件为 $v_2=v_3=\theta_3=0$.删去对应于零边界条件的行和列,得到下面的三阶方程组:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & 6L\\ 6L & 4L^2 & 2L^2\\ 6L & 2L^2 & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ \theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-wL/2\\ -wL^2/12\\ wL^2/12\end{Bmatrix} \tag{a}$$

求解方程组(a),得到 $\theta_1=5wL^3/12EI$、$\theta_2=wL^3/4EI$ 和 $v_1=-3wL^4/8EI$.两个节点均沿逆时针方向旋转,节点 1 是向下偏移的.利用题 4.6 中给出的局部刚度矩阵,解得最终的反作用力满足

$$\begin{Bmatrix}V_A\\ M_A\\ V_{B1}\\ M_B\end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3wL^4/8EI\\ 5wL^3/12EI\\ 0\\ wL^3/4EI\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}wL/2\\ wL^2/12\\ wL/2\\ -wL^2/12\end{Bmatrix} \tag{b}$$

和

$$\begin{Bmatrix}V_{B2}\\ M_B\\ V_C\\ M_C\end{Bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}1.5 & 1.5L & -1.5 & 1.5L\\ 1.5L & 2L^2 & -1.5L & L^2\\ -1.5 & -1.5L & 1.5 & -1.5L\\ 1.5L & L^2 & -1.5L & 2L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ wL^3/4EI\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{c}$$

可以求得最终的反作用力.解方程(b)和(c),得

$$V_A=R_A=0\quad V_{B1}=wL\quad V_{B2}=\frac{3wL}{8}\quad V_C=R_C=-\frac{3wL}{8}\quad M_A=0\quad M_B=\frac{wL^2}{2}$$

$$M_C=\frac{wL^2}{4}\quad R_B=V_{B1}+V_{B2}=\frac{11wL}{8}$$

剪切力和力矩表示在图 4-9(b)之中.

4.9 试利用 Hermite 插值多项式推导梁横向偏移模型的三次形函数.

解 ☞ 梁模型的形函数必须反映梁在每个节点处可能的挠度和旋度边界条件的性质.由此可见任意的一维三次函数并不一定是适定的.Hermite 插值多项式要求每个节点处的挠度和其一阶导数满足适当的条件.形状函数 N_1 如图 4-10(a)所示,其边界条件为 $v(0)=1$ 和 $v(L)=v'(0)=v'(L)=0$.对 $n=1$,式(4.5)和(4.6)中的函数 L_i 定义如下:

$$L_0(x)=\frac{x-x_L}{x_0-x_L}\quad L_L(x)=\frac{x-x_0}{x_L-x_0}$$

这里 $x_0=0$, $x_L=L$.将它们代入式(a),得到

$$L_0(x)=\frac{x-L}{-L}\quad L_L(x)=\frac{x}{L}\quad \frac{dL_0(x)}{dx}=\frac{-1}{L}\quad \frac{dL_L(x)}{dx}=\frac{1}{L} \tag{a}$$

由边界条件,只需要计算式(4.4)中的一项.形状函数 N_1 满足惟一的非零边界条件 $v(0)=1$,因而只需要计算式(4.5)中的 $U_i(x)=U_0(x)$:

$$U_0(x)=\left[1-2\left(\frac{-1}{L}\right)x\right]\left[\frac{(x-L)^2}{L^2}\right] \tag{b}$$

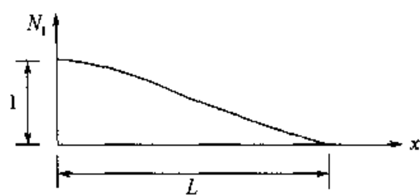
将上式及 $v(0)=1$ 代入式(4.4),经过整理,得到形状函数

$$N_1=1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3} \tag{c}$$

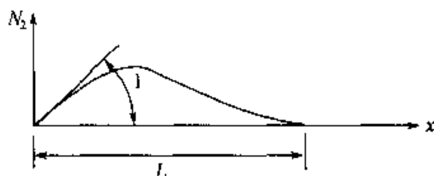
形状函数 N_2 满足 $x=0$ 处的旋度条件 $v'(0)=1$,其余的边界条件是 $v(0)=v(L)=v'(L)=0$.因而只需要计算式(4.4)中的一项 $W_i(x)$:

$$W_0(x)=(x)\left[\frac{(x-L)^2}{L^2}\right]$$

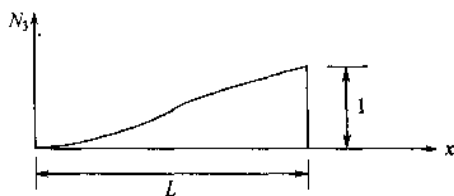
从而由式(4.4),有



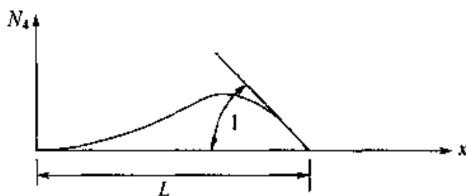
(a) $v(0)=1$



(b) $v'(0)=1$



(c) $v(L)=1$



(d) $v'(L)=1$

图 4-10

$$N_2 = x\left(1 - 2\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) \tag{d}$$

形状函数 N_3 满足 $x=L$ 处的挠度条件 $v(L)=1$，其余的边界条件是 $v(0)=v'(0)=v'(L)=0$. 因而只需要计算式(4.4)中的一项 $U_i(x)$：

$$U_L(x) = \left[1 - 2\left(\frac{1}{L}\right)(x-L)\right]\left(\frac{x^2}{L^2}\right)$$

从而由式(4.4)，有

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \tag{e}$$

类似的，N_4 必须满足 $v'(L)=1$ 和 $v(0)=v(L)=v'(0)=0$. 由式(4.6)，得

$$W_L(x) = \frac{(x-L)x^2}{L^2}$$

和

$$N_4 = x\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \tag{f}$$

因此，梁上任意位置的挠度可以写为

$$v(x) = N_1v_1 + N_2\theta_1 + N_3v_2 + N_4\theta_2$$

或

$$v(x) = [\mathrm{N}]\{\mathrm{v}\} \tag{g}$$

这里

$$[\mathrm{N}] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad 和$$

$$\{\mathrm{v}\} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^{\mathrm{T}} \tag{h}$$

4.10 利用式(3.13)定义的势能函数和题 4.9 的结论推导梁有限元的刚度矩阵.

解 ☞ 变分函数(3.13)可以写为体积积分和面积积分. 这里的体积表示梁的体积，并可以假设梁的任意有限单元内的横截面面积为常数；而这里的面积对应于受外部荷载力作用的任意曲面. 对于二维梁，这里的荷载为外部作用到梁上的荷载，它可以满足任何荷载条件，表 4-1 举例说明了某些荷载力. 外部作用的横向荷载 $w(x)$ 代替了式(3.13)中的曲面牵引力. 前面曾提到过刚度法中，将外部作用的横向荷载视作等价的节点荷载. 外部荷载的势能原理可以给出相似的结果. 另外，式(3.13)中的体积力项将被忽略. 式(3.13)可以写为

$$J(v) = \int_A\int_0^L \frac{1}{2}\sigma\varepsilon\,\mathrm{d}x\mathrm{d}A - \int_0^L wv\,\mathrm{d}x \tag{a}$$

式(a)的第一项称为应变能，因为该项被用来推导刚度矩阵，所以是主要项. 第二项是外部荷载的位势. 可以利用梁的弹性曲线的位移来定义应变. 更常见的方法是利用弯矩来定义弯曲应力. 由材料力学可以推导出，弯矩引起的应变为(见图 4-1)

$$\sigma(x) = \frac{M(x)y}{I} \tag{b}$$

由基本的梁理论—胡克定律，联合式(b)及(4.2)的第二个式子，有

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{\mathrm{E}} = \frac{M(x)y}{EI} = y\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{c}$$

式(a)可以写为

$$J(v) = \int_A\int_0^L \frac{y^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 E\mathrm{d}A\mathrm{d}x - \int_0^L wv\,\mathrm{d}x$$

考虑到 $\int_A y^2\mathrm{d}A = I$，上式更为紧凑的形式是

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2\mathrm{d}x - \int_0^L wv\,\mathrm{d}x \tag{d}$$

式(d)中的二阶导数是由题 4.9 中式(g)给出的形状函数和节点位移定义的. 由此可得

$$v'' = [\mathrm{N}'']\{v\}$$

将其代入式(d),得到矩阵形式的势能:

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_0^L\{v\}^T[N'']^T[EI][N'']\{v\}dx-\int_0^L\{v\}^T[N]^Tw\,dx \tag{e}$$

将 $J(V)$ 关于 $\{v\}$ 极小化,设上式求导后的结果为零,得到局部梁的有限元矩阵方程:

$$\int_0^L[N'']^T[EI][N'']\{v\}dx-\int_0^L[N]^Tw\,dx=0 \tag{f}$$

将题 4.9 中的式(c)至式(f)及其二阶导数的结果代入矩阵方程,有

$$\int_0^L\begin{bmatrix}\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\\ -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\\ \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\\ -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\end{bmatrix}[EI]\left[\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\quad -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\quad \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\quad -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right]\begin{Bmatrix}v_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix}dx$$

$$=\int_0^L\begin{Bmatrix}1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3}\\ x-2\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\\ 3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3}\\ \frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}\end{Bmatrix}w\,dx \tag{g}$$

进行矩阵乘法运算和积分计算,将得到刚度矩阵,并可将其与题 4.4 中的式(f)相比较.对应于表 4-1 中两端固定梁均匀荷载的等价节点荷载的矩阵为

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}wL/2\\ wL^2/2\\ wL/2\\ -wL^2/2\end{Bmatrix} \tag{h}$$

注意到坐标系中的 y 轴向上,且上述推导中的均匀荷载力也向上,因此式(g)右端的等价节点荷载的符号与表 4-1 中给出的结果的符号相反.

4.11 设梁受到横向荷载和轴向力的共同作用,试推导其局部有限元刚度矩阵.

解 ☞ 对于轴向力作用在直杆或梁上的模型,基本弹性题 2.9 利用变分函数推导了相应的刚度矩阵,而且题 2.21 采用直接方法重新推导了上述刚度矩阵.这些应用中将略去体积力,并代之以作用在节点 1 和节点 2 处的轴向力 N_1 和 N_2,节点荷载及相应的位移如图 4-11 所示.再次写出题 2.9 中轴向力满足的刚度矩阵,有

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\end{Bmatrix} \tag{a}$$

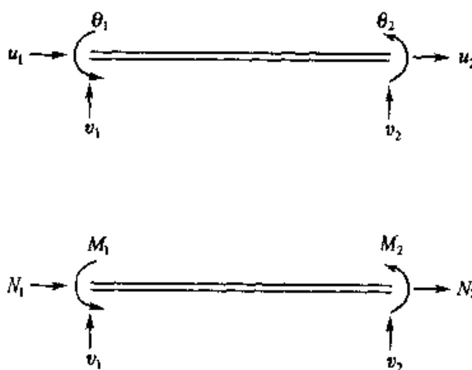


图 4-11

这里 u_1 和 u_2 为节点位移.将上式与题 4.4 中的式(f)相结合,得到完整的局部刚度矩阵:

$$\begin{Bmatrix}N_1\\ R_1\\ M_1\\ N_2\\ R_2\\ M_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0\\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L\\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2\\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0\\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L\\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_{2L^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ \theta_1\\ u_2\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix} \tag{b}$$

这里

$$C_1 = AE/L \qquad 和 \qquad C_2 = EI/L^3 \tag{c}$$

当梁的局部轴与其整体轴相重合时，梁的轴向和横向形变可以进行分解.

4.12 试推导定向梁在(ξ,η)局部坐标系中的变换矩阵和相应的刚度矩阵，并将它们引用到(x,y)整体坐标系之中.

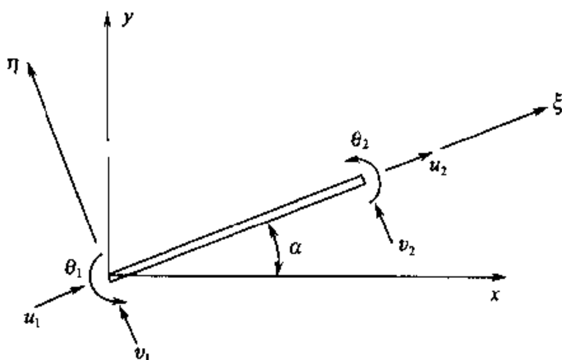


图 4-12 (ξ,η)局部坐标系中的正向轴位移、横向位移和旋度

解 ☞ 如图 4-12 所示的梁，向量变换由式(3.14)和式(3.15)给出并图示在图 3-2 中. 矩阵变换形式为

$$\{v\}_{\xi\eta} = [T]\{v\}_{xy} \tag{a}$$

$$\{v\}_{xy} = [T]^T\{v\}_{\xi\eta} \tag{b}$$

这里

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{c}$$

本例中的变换是指从(ξ,η)局部坐标系到(x,y)整体坐标系的变换矩阵. $\{v\}_{\xi\eta}$的转置为

$$\{v\}_{\xi\eta}^T = \{v\}_{xy}^T[T]^T \tag{d}$$

题 4.10 中式(e)的第一项可用来推导变换矩阵. 假设题 4.10 中对应局部 ξ,η 坐标系的矩阵及能量项为

$$\frac{1}{2}\int_0^L \{v\}_{\xi\eta}^T[N'']_{\xi\eta}^T[EI][N'']_{\xi\eta}\{v\}_{\xi\eta}dx \tag{e}$$

将式(a)和式(d)代入式(e)，有

$$\frac{1}{2}\int_0^L \{v\}_{xy}^T[T]^T[N'']_{\xi\eta}^T[EI][N'']_{\xi\eta}[T]\{v\}_{xy}dx \tag{f}$$

(ξ,η)局部坐标系中的刚度矩阵为

$$[K]_{\xi\eta} = \int_0^L [N'']_{\xi\eta}^T[EI][N'']_{\xi\eta}dx$$

其中的被积项表达式可以写为

$$\{v\}_{xy}^T[T]^T[K]_{\xi\eta}[T]\{v\}_{xy}$$

因此，(x,y)整体坐标系中的刚度矩阵为

$$[K]_{xy} = [T]^T[K]_{\xi\eta}[T] \tag{g}$$

从(ξ,η)局部坐标系到(x,y)整体坐标系的横向荷载的变换矩阵可以类似的得到(见题 4.26).

回顾题 3.23 中讨论的平面弹性问题边界条件的变换形式，读者们可以发现题 3.23 中式(d)给出的变换是上面给出的式(g)的逆变换. 注意到平面弹性问题边界条件是定义在(ξ,η)局部坐标系中的，面梁有限元问题的边界条件是定义在(x,y)整体坐标系中的. 为了将(ξ,η)坐标系下的节点位移变换为(x,y)坐标系下的节点位移，利用题 4.11 中由式(b)定义的位移向量，完整的节点位移边界条件的变换形式为

$$
\{v\}_{\xi\eta}=\begin{Bmatrix}u_{1\xi\eta}\\v_{1\xi\eta}\\\theta_{1\xi\eta}\\u_{2\xi\eta}\\v_{2\xi\eta}\\\theta_{2\xi\eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c&s&0&0&0&0\\-s&c&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&c&s&0\\0&0&0&-s&c&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}=[T]\{v_{xy}\} \tag{h}
$$

这里 $c=\cos\alpha, s=\sin\alpha$.

将上式代入式(g),并由题 4.11 中式(b)给出的刚度矩阵,整体坐标系中的刚度矩阵变为

$$
[K]_{xy}=\frac{E}{L}\begin{bmatrix}Ac^2+\frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s & -\left(Ac^2-\frac{12I}{L^2}s^2\right) & -\left(A-\frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s\\ & As^2+\frac{12I}{L^2}c^2 & \frac{6I}{L}c & -\left(A-\frac{12I}{L^2}\right)cs & -\left(As^2+\frac{12I}{L^2}c^2\right) & \frac{6I}{L}c\\ & & 4I & \frac{6I}{L}s & -\frac{6I}{L}c & 2I\\ & \text{对称} & & Ac^2+\frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12I}{L^2}\right)cs & \frac{6I}{L}s\\ & & & & As^2+\frac{12I}{L^2}c^2 & -\frac{6I}{L}c\\ & & & & & 4I\end{bmatrix} \tag{i}
$$

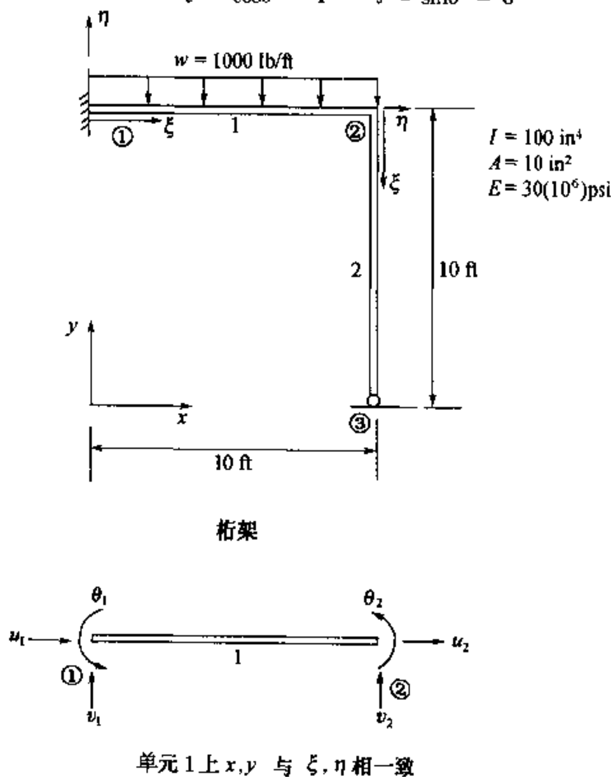
4.13 如图 4-13 所示的桁架中,节点 1 固定,节点 3 可以在 x 方向平行移动.试计算所有节点的位移和反作用力.

解 ☞ 为解决该问题,需要介绍题 4.12 中导出的矩阵变换方程式(i)的用途.分析过程中详尽、细致地说明了局部坐标系中给定的形变边界条件是如何转化到整体坐标系之中并具体确定的.设对两个结构单元都有 $I=100\ \text{in}^4$, $A=10\ \text{in}^2$ 和 $E=30\times10^6\text{lb/in}^2$,则可以计算出两个单元的刚度矩阵和相应的位移矩阵.

单元 1(节点 1-2):

设单元轴线是与整体坐标的 x 轴重合的从节点 1 到节点 2 的直线;经检验 $\alpha=0°$,那么

$$c=\cos0°=1\qquad s=\sin0°=0$$



桁架

单元 1 上 x,y 与 ξ,η 相一致

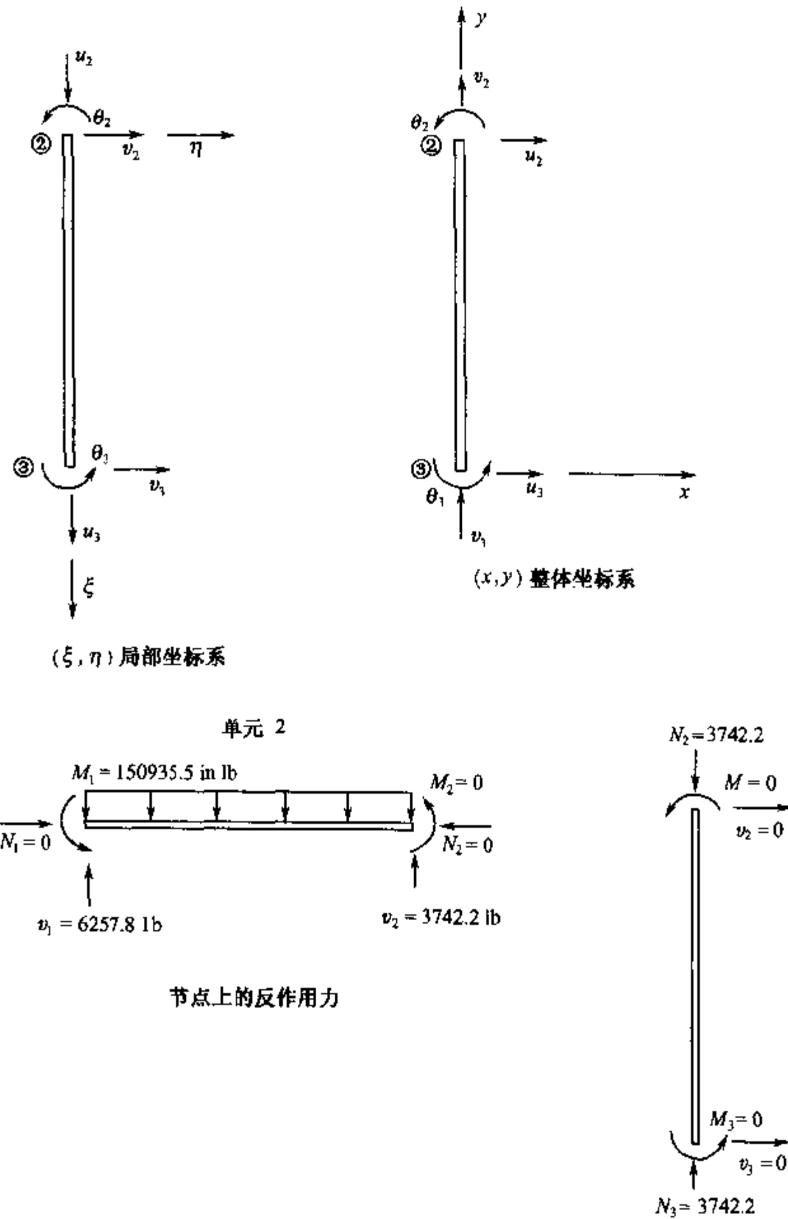


图 4-13

另外，对两个单元都有

$$\frac{12I}{L^2}=\frac{12(100)}{(120)^2}=0.083333$$

$$\frac{6I}{L}=\frac{6(100)}{120}=5$$

$$\frac{E}{L}=\frac{30(10)^6}{120}=250\ 000$$

将其代入题 4.12 中的式(i)，得到刚度矩阵

$$250\ 000\begin{bmatrix}10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0\\ 0 & 0.083333 & 5 & 0 & -0.083333 & 5\\ 0 & 5 & 400 & 0 & -5 & 200\\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0\\ 0 & -0.083333 & -5 & 0 & 0.083333 & -5\\ 0 & 5 & 200 & 0 & -5 & 400\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ \theta_1\\ u_2\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix}\qquad \text{(a)}$$

单元 2(节点 2-3)：

设单元轴线是从节点 2 到节点 3 的直线；经检验，局部坐标轴与整体坐标轴 x 之间的夹角是 $\alpha = 270°$，那么

$$c = \cos 270° = 0 \qquad s = \sin 270° = -1$$

重新将其代入题 4.12 中的式(i)，得到刚度矩阵

$$250\,000\begin{bmatrix} 0.08333 & 0 & 5 & -0.08333 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 5 & 0 & 400 & -5 & 0 & 200 \\ -0.08333 & 0 & -5 & 0.08333 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 200 & -5 & 0 & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

将式(a)和式(b)通过节点 2 的连通度结合在一起，得到整体刚度矩阵

$$250\,000\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.083333 & 5 & 0 & -0.083333 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 400 & 0 & -5 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10.08333 & 0 & 5 & -0.08333 & 0 & 5 \\ 0 & -0.083333 & -5 & 0 & 10.083333 & -5 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & 200 & 5 & -5 & 800 & -5 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & -0.083333 & 0 & -5 & 0.083333 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 200 & -5 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -1(10)^5 \\ 0 \\ -5000 \\ 1(10)^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

式(c)的右端表示作用在节点上的荷载，它替代了梁单元 1-2 上的均匀荷载，$V_1 = V_2 = -wL/2 = -5\,000$，$M_1 = -wL^2/2 = -100\,000 = -M_2$，边界条件为 $u_1 = v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$. 即使节点 3 处的位移在 (ξ, η) 局部坐标系中是沿轴向方向的，但该点处表示为 v_3 的零边界条件对应于整体坐标系上沿 y 轴方向的零位移. 经过坐标变换，所有边界条件必须引用 (x, y) 坐标系中的条件，即位移 u 和 v 自始至终分别对应于 x 和 y. 注意到，在二维空间中，旋度 θ 是由垂直于结构平面的向量表示的，因而不需要对其进行坐标变换.

删去对应于零边界条件的行和列，得到待解的矩阵方程组

$$250\,000\begin{bmatrix} 10.083333 & 0 & 5 & -0.083333 & 5 \\ 0 & 10.083333 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 800 & -5 & 200 \\ -0.083333 & 0 & -5 & 0.083333 & -5 \\ 5 & 0 & 200 & 5 & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 1(10)^5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

求解方程组(d)，得到节点位移的结果：

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.91038(10)^{-11} \\ -1.49688(10)^{-3} \\ 9.81293(10)^{-4} \\ 0.117755 \\ 9.81293(10)^{-4} \end{Bmatrix} \tag{e}$$

将位移代入式(a),得到关于单元 1 的结果:

$$250\,000\begin{bmatrix}10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0\\ 0 & 0.083333 & 5 & 0 & -0.083333 & 5\\ 0 & 5 & 400 & 0 & -5 & 200\\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0\\ 0 & -0.083333 & -5 & 0 & 0.083333 & -5\\ 0 & 5 & 200 & 0 & -5 & 400\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -2.91038(10)^{-11}\\ -1.49688(10)^{-3}\\ 9.81293(10)^{-4}\end{Bmatrix} \tag{f}$$

节点荷载必须叠加到式(f)给出的结果之中,即

$$\begin{Bmatrix}0\\ 1257.8\\ 50\,935.5\\ 0\\ -1257.8\\ 100\,000\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 5000\\ 100\,000\\ 0\\ 5000\\ -100\,000\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 6257.8\\ 150\,935.5\\ 0\\ 3742.2\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N_1\\ V_1\\ M_1\\ N_2\\ V_2\\ M_2\end{Bmatrix} \tag{g}$$

上述结果如图 4-13 所示. 将位移代入式(b),得到关于单元 2 的结果:

$$250\,000\begin{bmatrix}0.08333 & 0 & 5 & -0.08333 & 0 & 5\\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0\\ 5 & 0 & 400 & -5 & 0 & 200\\ -0.08333 & 0 & -5 & 0.08333 & 0 & -5\\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0\\ 5 & 0 & 200 & -5 & 0 & 400\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2.91038(10)^{-11}\\ -1.49688(10)^{-3}\\ 9.81293(10)^{-4}\\ 0.117755\\ 0\\ 9.81293(10)^{-4}\end{Bmatrix} \tag{h}$$

由于单元 2 上没有外部荷载,节点荷载为零. 计算式(h)中的乘法,得到整体坐标系中的结果,其形式为

$$\begin{Bmatrix}0\\ -3742.2\\ 0\\ 0\\ 3742.2\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -3742.2\\ 0\\ 0\\ 3742.2\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N_2\\ V_2\\ M_2\\ N_3\\ V_3\\ M_3\end{Bmatrix} \tag{i}$$

为了对计算结果(i)进行解释,需要将其转换回局部坐标系之中. 题 4.12 中的式(a)给出的坐标变换形式可以写为 $\{F\}_{\xi\eta}=[T]\{F\}_{xy}$,这里 $\{F\}$ 表示节点处的反作用力. 变换的矩阵形式由题 4.12 中的式(h)给出. 局部坐标系中的结果为

$$\begin{Bmatrix}N_{2\xi\eta}\\ V_{2\xi\eta}\\ M_{2\xi\eta}\\ N_{3\xi\eta}\\ V_{3\xi\eta}\\ M_{3\xi\eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -3742.2\\ 0\\ 0\\ 3742.2\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3742.2\\ 0\\ 0\\ -3742.2\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{j}$$

最终计算结果如图 4-13 所示. 读者们需要注意,单元 2 中的局部坐标轴是从节点 2 到节点 3 的直线,式(j)给出的结果表明这段直立梁受到了张力的作用.

4.14 如图 4-14 所示的桁架,受到节点 1 和节点 3 处的针式支承点的支撑. 桁架结构可以在这两个点处自由转动,但不能移动. 桁架的长度和结构特性与题 4.13 中的桁架相同. 试计算每个支承点上的反作用力和节点 2 处的内部作用力.

解 单元 1(节点 1-2):

这个单元梁与题 4.13 中的单元 1-2 相同,其刚度矩阵与题 4.13 中的式(a)是一样的.

单元 2(节点 2-3):

设单元轴线是从节点 2 到节点 3 的直线;经检验,局部坐标轴与整体坐标轴 x 之间的夹角是 $\alpha=300°$,

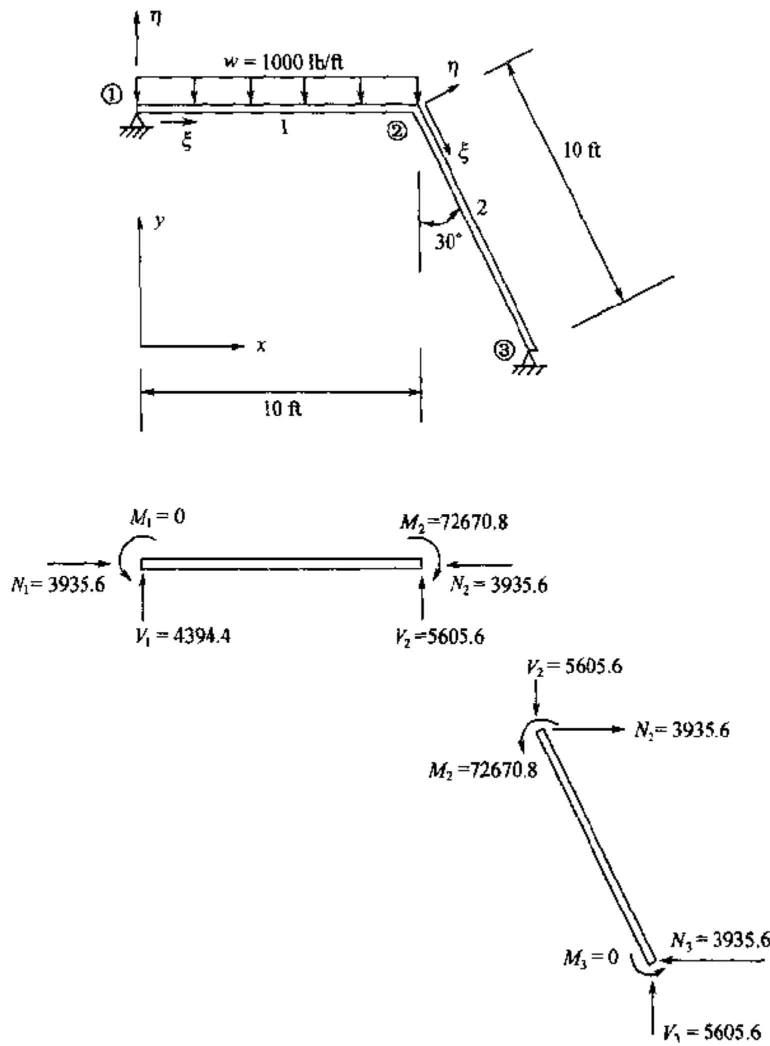


图 4-14　(x, y)坐标系中节点的反作用力

那么

$$c = \cos 300° = 0.5 \qquad s = \sin 300° = -0.086603$$

将其代入题 4.12 中的式(i),得到对称刚度矩阵

$$250\,000\begin{bmatrix} 2.5625 & -4.2941 & 4.3301 & -2.5625 & 4.2941 & 4.3301 \\ & 7.5208 & 2.5 & 4.2941 & -7.5208 & 2.5 \\ & & 400 & -4.3301 & -2.5 & 200 \\ & & & 2.5625 & -4.2941 & -4.3301 \\ & & & & 7.5208 & -2.5 \\ & & & & & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

将单元刚度矩阵通过节点 2 的连通度结合在一起,代入边界条件 $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$,得到用于求解平移量和旋度的整体刚度矩阵,相应的矩阵方程组为

$$250\,000\begin{bmatrix} 400 & 0 & -5 & 200 & 0 \\ & 12.5625 & -4.2941 & 4.3301 & 4.3301 \\ & & 7.6042 & -2.5 & 2.5 \\ & \text{对称} & & 800 & 200 \\ & & & & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1(10)^5 \\ 0 \\ -5000 \\ 1(10)^5 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

求解方程组(b),得到节点位移的结果:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.54936(10)^{-3} \\ -1.57457(10)^{-3} \\ -4.06005(10)^{-3} \\ 9.97222(10)^{-4} \\ -4.56194(10)^{-4} \end{Bmatrix} \tag{c}$$

将上述位移代入题 4.12 中的式(a),并加上等价的节点荷载,得到相应于单元 1 的解:

$$250\,000\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.083333 & 5 & 0 & -0.083333 & 5 \\ 0 & 5 & 400 & 0 & -5 & 200 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -0.083333 & -5 & 0 & 0.083333 & -5 \\ 0 & 5 & 200 & 0 & -5 & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.54936(10)^{-3} \\ -1.57457(10)^{-3} \\ -4.06005(10)^{-3} \\ 9.97222(10)^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 3935.6 \\ -605.6 \\ -100\,000 \\ -3935.6 \\ 605.6 \\ 27\,329.2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 5000 \\ 100\,000 \\ 0 \\ 5000 \\ -100\,000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3935.6 \\ 4394.6 \\ 0 \\ -3935.6 \\ 5605.6 \\ -72\,670.8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

类似的,利用上面的式(a)进行计算,得到整体坐标系中单元 2 上节点 2 和节点 3 处的反作用力的结果:

$$250\,000\begin{bmatrix} 2.5625 & -4.2941 & 4.3301 & -2.5625 & 4.2941 & 4.3301 \\ & 7.5208 & 2.5 & 4.2941 & -7.5208 & 2.5 \\ & & 400 & -4.3301 & -2.5 & 200 \\ & & & 2.5625 & -4.2941 & -4.3301 \\ & \text{对称} & & & 7.5208 & -2.5 \\ & & & & & 400 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.57457(10)^{-3} \\ -4.06005(10)^{-3} \\ 9.97222(10)^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ -4.56194(10)^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 3935.6 \\ -5605.6 \\ 72\,670.8 \\ -3935.6 \\ 5605.6 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3935.96 \\ -5605.6 \\ 2670.8 \\ -3935.6 \\ 5605.6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

可以用变换$\{F\}_{\xi\eta} = [T]\{F\}_{xy}$将节点处的反作用力转换成局部坐标系中的形式,这里$\{F\}$由题 4.12 中的式(h)给出.

补充习题

4.15　利用式(4.1)确定的微分方程,求解如图 4-15 所示固定梁的剪切力和力矩的反作用力.

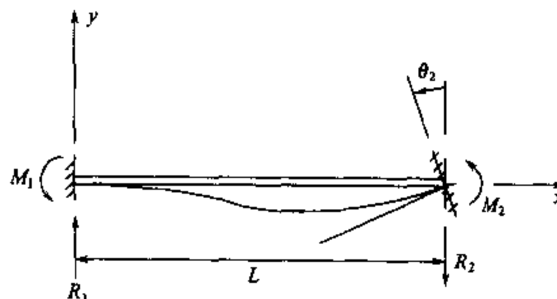


图 4-15　在 $x = L$ 处施加旋度 θ_2

4.16　利用式(4.1)确定的微分方程,求解如图 4-16 所示固定梁的剪切力和力矩的反作用力.

4.17　验证表 4-1 给出的固定梁的等价荷载.

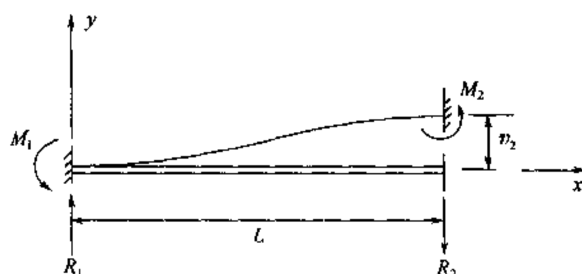


图 4-16　在 $x=L$ 处施加位移

4.18　计算如图 4-17 所示梁的反作用力.

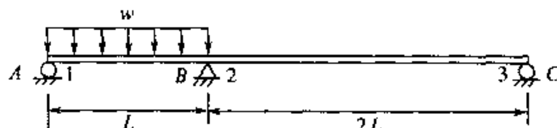


图 4-17

4.19　计算如图 4-18 所示梁的反作用力.

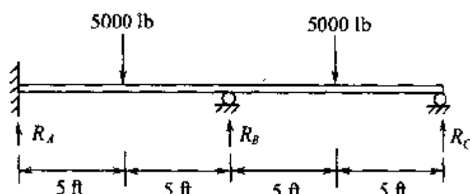


图 4-18

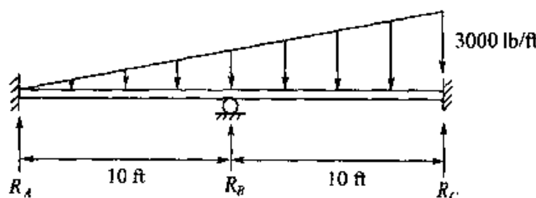


图 4-19

4.20　计算如图 4-19 所示梁的反作用力.

4.21　计算如图 4-20 所示梁的反作用力.

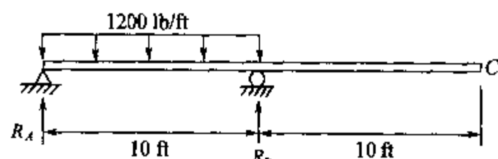


图 4-20

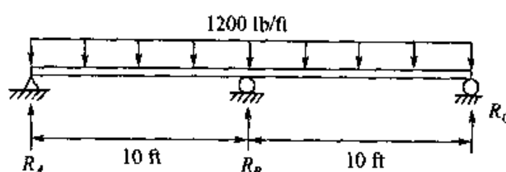


图 4-21

4.22　计算如图 4-21 所示梁的反作用力.

4.23　证明题 4.3 中计算得到的等价节点荷载和表 4-1 中列出的均匀变化外力荷载可以由题 4.10 中的势能表达式(f)获得.

4.24　设某梁有限单元的长度为 L,试推导其形状函数.设三次多项式的形式为

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

满足边界条件 $v(0)=0, v(L)=0, v'(0)=0$ 和 $v'(L)=0$.

4.25　图 4-22 所示的固定梁在 $2L/3$ 处受到轴向力的作用,采用题 4.11 推导出的有限元方法计算沿轴向的反作用力.

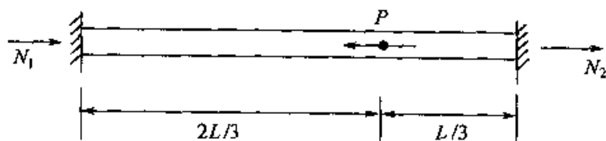


图 4-22

4.26 对梁的横向荷载问题,推导从(ξ,η)局部坐标系到(x,y)整体坐标系的变换形式.

4.27 设题 4.13 满足另外的边界条件 $u_2=v_2=0$,试重新解决该问题.

4.28 如图 4-23 所示的桁架结构,计算支承点 A 和 D 处的反作用力以及节点 B 和 C 处的旋度.设对所有单元有 $E=29\times10^6$ psi, $I=1800$ in^4 和 $A=20$ in^2.

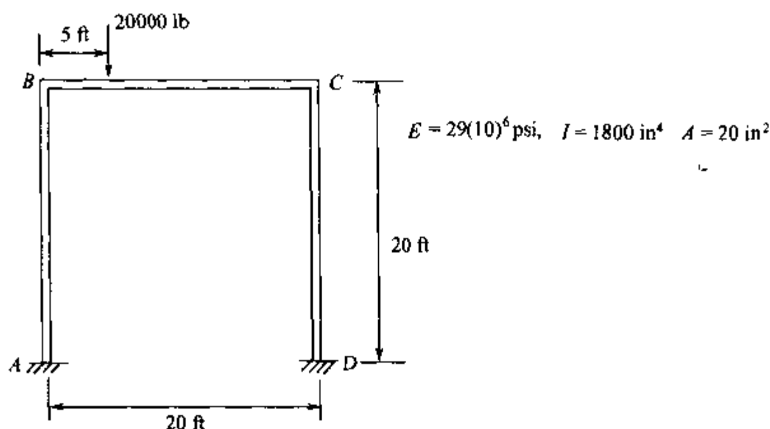
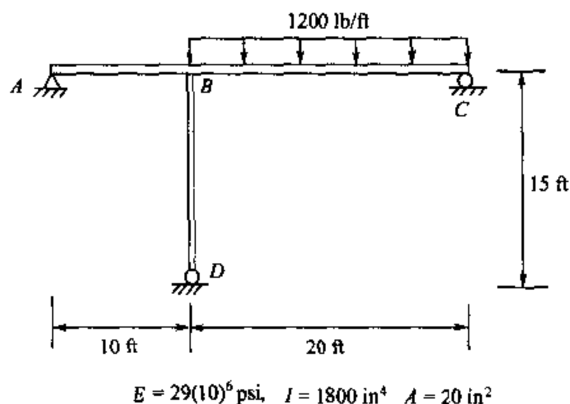


图 4-23

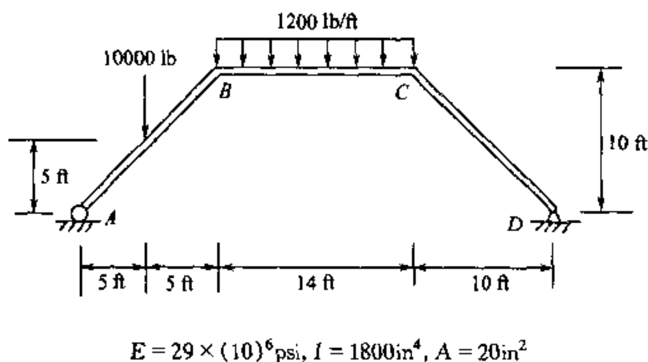
4.29 如图 4-24 所示的桁架结构,计算支承点 A、C 和 D 处的反作用力以及节点 A、B、C 和 D 处的旋度,并计算支承点 C 和 D 处的水平位移.设对所有单元有 $E=29\times10^6$psi, $I=1800$in^4 和 $A=20$ in^2.



$E=29(10)^6$psi, $I=1800$ in^4　$A=20$ in^2

图 4-24

4.30 如图 4-25 所示的桁架结构,计算节点 A 处的反作用力、节点旋度和水平位移.设对所有单元有 $E=29\times10^6$psi, $I=1800$ in^4 和 $A=20$in^2.



$E=29\times(10)^6$psi, $I=1800$in^4, $A=20$in^2

图 4-25

补充习题答案

4.15 $M_1=2EI\theta_2/L, M_2=4EI\theta_2/L, R_1=6EI\theta_2/L^2, R_2=6EI\theta_2/L^2$.

4.16 $M_1=M_2=6EIv_2/L^2, R_1=R_2=12EIv_2/L^3$.

4.18 $M_A=M_C=0, M_B=-3wL^2/72$(作用在单元 $A-B$ 上), $R_A=33wL/72, R_B=81wL/144, R_C=-3wL/144, \theta_A=-5wL^3/144EI, \theta_B=wL^3/36EI, \theta_C=-wL^3/72EI, V_A=V_B=V_C=0$.

4.19 $M_A=5360$ ft·lb, $M_B=-8040$ ft·lb(作用在单元 $A-B$ 上), $R_A=2230$ lb, $R_B=6070$ lb, $R_C=1700$ lb, $\theta_A=0, \theta_B=-1.48\times10^{-5}, \theta_C=5.91\times10^{-5}$.

4.20 $M_A=2500$ ft·lb, $M_B=-12\ 500$ft·lb(作用在单元 $A-B$ 上), $M_C=-22\ 500$ft·lb, $R_A=1500$ lb, $R_B=15\ 000$lb, $R_C=13\ 500$ lb, $\theta_B=-4.14\times10^{-5}$.

4.21 $R_A=6000$ lb, $R_B=6000$ lb, $M_B=0, \theta_A=-1.655\times10^{-3}, \theta_B=\theta_C=1.655\times10^{-3}, v_C=0.1986$ in.

4.22 $M_A=M_C=0, M_B=-15\ 000$ ft·lb(作用在单元 $A-B$ 上), $R_A=R_C=4500$ lb, $R_B=15\ 000$ lb, $\theta_A=-\theta_C=-8.28\times10^{-5}, \theta_B=0$.

4.23 计算 $\int_0^L[N]^T(-wx/L)dx$,这里的$[N]^T$由题 4.10 式(g)给出.

4.24 代入边界条件:

$$v(0)=v_1=a_0$$
$$v(L)=v_2=a_0+a_1L+a_2L^2+a_3L^3$$
$$v'(0)=\theta_1=a_1$$
$$v'(L)=\theta_2=a_1+2a_2L+3a_3L^2$$

求得其中的系数为

$$a_0=v_1 \quad a_1=\theta_1 \quad a_2=-\frac{3(v_1-v_2)}{L^2}-\frac{2\theta_1+\theta_2}{L} \quad a_3=\frac{2(v_1-v_2)}{L^3}+\frac{\theta_1+\theta_2}{L^2}$$

整理并将 $v(x)$写为矩阵形式 $v(x)=[N]\{v\}$,得到与题 4.9 相同的[N].

4.25 从这个梁有限元的应用中可以解出轴向形变和横向形变,并可以从题 4.11 中的式(a)得到其结果.局部单元刚度矩阵是

$$\frac{3AE}{2L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -P\end{Bmatrix} \quad \frac{3AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

整体有限元刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -P\\ 0\end{Bmatrix}$$

边界条件是 $u_1=u_3=0$.将刚度方程简化为一个方程可以解得 $u_2=-2PL/9AE$.将 u_2 代入局部单元刚度方程得到 $N_1=P/3$ 和 $N_3=2P/3$,其方向均向右.

4.26 参见题 4.10 中的式(c).横向荷载项是 $\int_0^L\{v\}^T[N]^Twdx$.将题 4.12 中的式(e)代入,得 $\int_0^L\{v\}_{xy}^T[T]^T[N]^Twdx$,最终的变换形式为 $[T]^T\int_0^L[N]^Twdx$.

4.27 附加的边界条件假设了垂直方向的直立梁没有轴向形变,并且对应于一般的材料力学分析.计算结果是 $M_1=150\ 000$in·lb, $V_1=6250$ lb 和 $V_3=3750$ lb.

4.28 $M_A=-9990$ft·lb, $M_B=27\ 340$ ft·lb(作用在单元 $B-C$ 上), $M_C=-22\ 540$ ft·lb(作用在单元 $B-C$ 上), $M_D=14\ 780$ft·lb;垂直方向的反作用力 $V_A=15\ 240$ lb, $V_D=4760$ lb;水平方向的反作用力 $H_A=H_D=1870$ lb; $\theta_A=\theta_D=0, \theta_B=-4.787\times10^{-4}, \theta_C=2.141\times10^{-4}$.

4.29 $M_A=M_C=M_D=0, M_B=37\ 520$ ft·lb(作用在单元 $B-C$ 上);垂直方向的反作用力 $V_A=-3750$ lb, $V_C=10\ 120$ lb, $V_D=17\ 630$ lb; $\theta_A=1.296\times10^{-4}, \theta_B=\theta_D=-3.906\times10^{-4}, \theta_C=7.812\times10^{-4}$;水平方向的位移 $u_D=-0.0703$ in, $u_C=0$.

4.30 $M_A = M_D = 0$, $M_B = -108\ 960$ ft·lb(作用在单元 $B-C$ 上), $M_C = 94\ 400$ ft·lb(作用在单元 $B-C$ 上), $V_A = 17\ 370$ lb, $V_D = 9450$ lb, $\theta_A = -4.187 \times 10^{-3}$, $\theta_B = -2.246 \times 10^{-3}$, $\theta_C = 2.438 \times 10^{-3}$, $\theta_D = 4.279 \times 10^{-3}$, $u_A = -0.90$ in.

第五章 变分原理，伽辽金逼近和偏微分方程

5.1 引言

在前面的章节中，由基本单元和问题的公式化以及数学物理和工程上的基本方程，使用有限元法对分析的基本数值方法进行了讨论．在本章中将展现变分原理的一个较为基本的发展．对于那些熟悉变分原理的数学结构而不熟悉在有限元应用的读者将能发现在应用方面上的一些详细的例子．面对于那些不熟悉泛函分析和矢量空间数学知识的读者，这些例子将要把数学概念转换成更为有意义的应用情形．无论对哪一种情况在参考文献中都给出了几个可作为辅助读物的参考书目．

在本章中强调介绍数值分析中的伽辽金方法．说明数学方法的例子将帮助读者理解有关加权残量法的概念．详尽的例子被用来说明伽辽金方法在导出局部刚度矩阵的应用．对有限元分析来说，伽辽金方法是一个比变分法更为有力的工具，因为几乎所有的用一个或多个微分方程的物理问题都可以用此方法模拟．变分原理不是对所有的物理问题存在，然而通过那些证明变分公式存在或不存在的数学结果，分析者可以了解到比从伽辽金法那里得到的更多问题的基本数学结构．

在本章中有限元方法将要扩展到解耦合偏微分方程组的情形．由于关于位移的有限单元在两个独立的方向被导出，因此第三章的弹性方程就是一个耦合问题的例子．在数学物理领域中存在多种这样的问题．本章中有足够的例子以使读者能够对任何情形下都能推导其有限元．在这里将要讨论初值问题，但是有关它们的数值解将在第七章中叙述．本章将使用下标张量记号，不熟悉此记号的读者能在第一章中找到有关的简要概述．

5.2 变分原理

关于变分原理的更为抽象的数学表述可表示为

$$J(u) = [u, Au]_{\Omega} - 2[u, f]_{\Omega} \tag{5.1}$$

其中 A 是一个自共轭正定算子，f 是区域 Ω 中的已知矢量，u 是未知矢量．标记$[\,,\,]_{\Omega}$表示一个内积并可以认为具有与矢量分析中内积或数量积相似的性质．括号中相乘的项给出一个数量结果．此外，在式(5.1)中，记号能够理解为在区域 Ω 内一个体积上的积分．

算子 A 和矢量 f 与 u 定义了边值问题

$$Au = f(\text{在 }\Omega\text{ 上}) \tag{5.2}$$

变分微积分的一个基本概念是式(5.1)的最小值 u 就是式(5.2)的解．这些相当基本的思想与泛函分析和矢量空间理论都是相联系的，并且有几种条件可以作用于它们之上．在本书中，重点是放在抽象概念的解释和变分原理的构造上．

如果没有一组边界条件，那么式(5.2)是不完全的．边界条件可以写成

$$Cu = g(\text{在 }\partial\Omega) \tag{5.3}$$

其中 C 是一算子，u 是未知矢量，且 g 是一组给定量(边界条件)．式(5.1)可以扩展成

$$J(u) = [u, Au]_{\Omega} - 2[u, f]_{\Omega} + [u, Cu]_{\partial\Omega} - 2[u, g]_{\partial\Omega} \tag{5.4}$$

并且包括在变分原理定义范围之内的边界条件．

由式(5.1)所表示的基本叙述对于边界齐次条件来说是有效的，而式(5.4)对于非齐次边界条件是有效的．通常将式(5.1)括号中的第一项写成一般的形式$[u, Av]$，其中 u 和 v 定义在一个所谓的矢量空间之中，此项称为双线性影射，并且必须满足特定的数学要求(见 Reddy, 1986)．算子 A 称为式对称的，如果

$$[u, Av]_{\Omega} = [v, Au]_{\Omega} = [Au, v]_{\Omega} \tag{5.5}$$

由式(5.5)定义的对称算子并不意味着在矩阵分析叙述中的一个对称矩阵.算子 A 的伴随算子记为 A^*,并在下面的叙述中定义.若

$$[u, Av]_\Omega = [A^* u, v]_\Omega = [v, A^* u]_\Omega \tag{5.6a}$$

对于齐次边界条件或

$$[u, Av]_\Omega = [v, A^* u]_\Omega + D_{\partial\Omega}(v, u) \tag{5.6b}$$

那么 A^* 称为 A 的伴随算子,其中 u 和 v 定义在同一个矢量空间之中,并且 Ω 表示空间的定义域,$D_{\partial\Omega}(u, v)$表示可能的边界条件.若 $A = A^*$,则算子 A 就称为式自伴随的.

由式(5.5)定义的对称性应用到式(5.1)就隐含着一个简单的关系$[u, Au] = [Au, u]$.然而,当 u 表示多于一个的场变量时,应表示为

$$[u_i, A_{ij}u_j] = [u_j, A_{ji}u_j] \quad \text{(重复标不求和)} \tag{5.7}$$

自伴随算子的概念依赖于双线性影射的形式.与一个常微分方程(例如像第二章中的那些方程)相联系的一般形式为

$$[p, q] = \int_\Omega p(x)q(x)\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

时间相关问题需要双线形影射不同的定义.扩展(5.8)式使之包括 t

$$[p, q] = \int_\Omega\int_0^t p(x, t)q(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

并且空间维数可以表示一,二和三维.式(5.5)—(5.7)依赖于双线性影射的定义.对时间有一阶(或其他奇数阶)导数的微分方程,关于式(5.9)的双线性形式上不是自伴随的.Reddy(1975)和 Oden 与 Reddy(1976)已经证明,热传导类型的方程(对时间有一阶导数的初值问题)关于双线性形式上是自伴随的.

$$[p, q] = \int_\Omega\int_0^t p(x, t)q(x, t-\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \tag{5.10}$$

热传导类型的初值问题可以用一个在对角线上的时间导数的算子[式(5.2)的形式]和初值条件来描述.

对于能够归类于一个具有时间导数初值问题的物理情形,如果时间导数不能放于算子的对角线上或在计算区域内不能对称放置,那么它关于式(5.10)的双线性影射方面就不是自伴随的.描述与时间相关的热电偶对的方程就是一个例子.Gurtin(1967)在研究线性粘弹性时第一次使用了双线性影射的卷积类型,因此相应的变分原理就称为 Gurtin 类型的变分原理.卷积在粘弹性领域之外也被广泛应用[见 Oden 与 Reddy(1976)以及参考文献].使用拉普拉斯变换可定义卷积双线性影射为

$$L^{-1}[p', q'] = \int_\Omega\int_0^t p(x, \tau)q(x, t-\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau = [p * q] \tag{5.11}$$

其中 $L^{-1}\{p'(s)\} = p(x, t)$,且 $L^{-1}\{q'(s)\} = q(x, t)$.

使用式(5.1)或式(5.4)导出的变分原理是一个所有场变量的函数.然而它虽然是一个合适的变分函数,但它不适合有限元分析.从基本的或一般的函数可以导出另外的变分函数,并且被称为扩展的变分原理.通过假设一个或多个控制方程和边界条件完全满足(见题 5.5),就能得到扩展原理.

5.3 Galerkin 逼近

逼近分析中 Galerkin 方法可归类为一种加权余量法.它是建立在微分方程的一个假设的近似解基础上的.由于假设的是一种近似,因此微分方程将不能被满足,并且在解中存在一个误差.然后对此误差(残差)求关于某些参数的最优,则这个最优化过程就称为加权余量法.假设一个微分方程,例如第二章中的热传导方程,能假设其解 T_R 为

$$T_R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \tag{5.12}$$

其中 a_i 是未知常数.假定的解必须满足边界条件,并且由此得到式(5.12)中含有的未知量数比边界条件数必须至少多一个.用有限元分析这一要求容易满足.将热传导方程的精确解定义为 T,逼近解定义为 T_R.则误差或残差 R 就是这两者的差

$$R = T - T_R \tag{5.13}$$

加权残差法要求使用下面的准则计算式(5.12)中的未知量

$$\int_\Omega w_i(x)R(x,a_i)dV = 0 \tag{5.14}$$

其中在每一个 $w_i(x)$ 和 $R(x,a_i)$ 之间存在着一一对应,且 Ω 表示问题的定义域.Galerkin 法要求每个 w_i 是一个被式(5.12)中对应 a_i 相乘的函数.当使用有限元分析 Galerkin 法时,在式(5.12)中假定的函数是形状函数.可以证明 Galerkin 法和变分原理可导出相等的公式.显然,由于 Galerkin 法是十分强大的,因为它能够应用于那些不存在变分公式化的物理问题.

一旦读者掌握了 Galerkin 法推导微分方程的有限元模型的技术,就可以显示出 Galerkin 法比变分方法优越.这段话并不是试图说明哪一个更好,但是当对某种数值分析两种方法都可用时,它们提供了对每一种方法的检验.每一种方法都有其相对的优点.例如,当由变分函数开始时,第三章中的变换矩阵的推导更明确一些.另一方面,对于在每个有限单元结点上有两个自由度的问题,可以对每一个自由度使用不同的形状函数进行模拟,同时当使用 Galerkin 法时推导过程将更加明确.

5.4　联立偏微分方程

第三章中的弹性问题是联立偏微分方程的例子.其中含有两个未知位移,且相互依赖.在相应的有限元公式化过程中,在每个结点上存在必须同时求解的两个自由度.在工程和物理领域中必须用数值手段进行研究的大多数问题都有联立的变量.物质扩散的联立原理在题 5.14—5.16 中分析.稳定状态的热弹性问题在题 5.17—5.18 中讨论,其中因为稳定状态的假设,热作用和力学位移作用没有联立.位移与温度有关,但是温度与位移和拖曳力边界负载无关.然而,为简单起见将问题看成是一个联立问题进行公式推导,并且使用单一的有限元公式化计算未知温度和位移.完全耦合的热弹性问题是与时间相关的并在题 5.8 中讨论.控制材料上的电和位移作用的原理称作压电学.这个原理是完全联立的并在题 5.19 中讨论.

5.5　初值问题

有两种基本类型的初值问题.不稳定热传导就是在公式中只含有时间一阶导数的问题的例子.含有时间二阶导数的动力学问题构成了第二种类型,其中控制动力弹性的方程是一个例子.根据公式,热弹性理论是动力弹性静力的,但是结合到公式的能量部分中的时间一阶导数.动力热弹性可以控制自由震动或有热传导作用的波的传播.独立于弹性位移的具有热传导作用的稳定状态的热弹性应是一个基本的情况.当然,稳定状态的热弹性不是一个初值问题.

例题详解

5.1　假设一组抽象方程

$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = f_1$$
$$A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = f_2$$

并将这些方程与式(5.1)和(5.2)联系.

解　☞ 式(5.2)的算子为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

并且 $u=\{u_1\quad u_2\}^T$ 和 $f=\{f_1\quad f_2\}^T$. 式(5.1)中的内积可写为

$$J(u)=\{u_1\quad u_2\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}-2\{u_1\quad u_2\}\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\end{Bmatrix}$$

在右侧首项的第三个矩阵被第二个矩阵前乘并可写为

$$J(u)=\{u_1\quad u_2\}\begin{bmatrix}A_{11}u_1+A_{12}u_2\\ A_{21}u_1+A_{22}u_2\end{bmatrix}-2\{u_1\quad u_2\}\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\end{Bmatrix}$$

上面的乘法完全与矩阵乘法相似，但是用式(5.1)的记号写为

$$J(u)=[u_1,A_{11}u_1]+[u_1,A_{12}u_2]+[u_2,A_{21}u_1]+[u_2,A_{22}u_2]-2[u_1,f_1]-2[u_2,f_2] \tag{a}$$

5.2 根据题 5.1 所得的结果讨论对称性.

解 ☞ 由式(5.7)和题 5.1 的(a)知，算子 A 的对称性意味着 $[u_1,A_{12}u_2]=[u_2,A_{21}u_1]$，代入到题 5.1 中的式(a)则可消去 A_{21}，即

$$J(u)=[u_1,A_{11}u_1]+2[u_1,A_{12}u_2]+[u_2,A_{22}u_2]-2[u_1,f_1]-2[u_2,f_2]$$

类似地，也可消去 $[u_1,A_{12}u_2]$.

5.3 用题 5.2 中的抽象方程的格式推导一维稳定热传导的变分原理.

解 ☞ 式(2.9)和(2.10)给出了一维恒定热传导方程，并可写为

$$\frac{dq}{dx}=Q \quad 和 \quad q+k\frac{dT}{dx}=0$$

由下面的定义可将方程写成式(5.2)的形式

$$A=\begin{bmatrix}0 & d/dx\\ -d/dx & -1/k\end{bmatrix} \tag{a}$$

并且 $u=\{T\quad q\}^T$, $f=\{Q\quad 0\}^T$. 由题 5.1 的步骤可建立变分函数为

$$J(u)=\{T\quad q\}\begin{bmatrix}0 & d/dx\\ -d/dx & -1/k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T\\ q\end{Bmatrix}-2\{T\quad q\}\begin{Bmatrix}Q\\ 0\end{Bmatrix}$$

相乘之后得到

$$J(u)=\left[T,\frac{dq}{dx}\right]_\Omega-\left[q,\frac{dT}{dx}\right]_\Omega-\left[q,\frac{q}{k}\right]_\Omega-2[T,Q]_\Omega \tag{b}$$

如同在题 5.2 中的讨论的那样，对称性意味着

$$\left[T,\frac{dq}{dx}\right]_\Omega=-\left[q,\frac{dT}{dx}\right]_\Omega \tag{c}$$

现在假设有均匀的边界条件，且令 $T\equiv u(x)$, $q\equiv v(x)$ 及 $A\equiv d/dx$ 时将式(c)与式(5.1)联系. 再假设函数作用于定义域 Ω，且此 Ω 替换成 0 到 L 上的定积分. 因此得到

$$\left[T,\frac{dq}{dx}\right]_\Omega\Rightarrow\int_\Omega\left[T,\frac{dq}{dx}\right]dx=\int_0^L T(x)\frac{dq(x)}{dx}dx$$

由分部积分的

$$\left[T,\frac{dq}{dx}\right]_\Omega=Tq\Big|_0^L-\int_0^L q\frac{dT}{dx}dx=-\left[q,\frac{dT}{dx}\right]_\Omega \tag{d}$$

在 0 和 L 上的均匀边界条件使得式(d)中的边界项为零. 式(d)给出与式(c)相同的结果，并且当与时间无关时，则在由式(5.8)或式(5.9)定义的影射的意义上此问题是自伴随的. 注意由式(a)定义的算子 A 是自伴随的. 式(d)显示其自身的一阶导数并不是自伴随的.

一个更一般的概念使用了散度原理(高斯消去原理)并且证明了在 q 上包含有边界条件. 在第一章中讨论的散度原理，并且当把在这里使用的记号应用到项 $[T,dq/dx]$ 时，得到下面的结果

$$J(u)=-2\left[q,\frac{dT}{dx}\right]_\Omega-\left[q,\frac{q}{k}\right]_\Omega-2[T,Q]_\Omega+[T,qn]_{\partial\Omega_q} \tag{e}$$

其中 n 是由 $\partial\Omega_q$ 定义的表面(有边界流作用的表面)上的外法矢量. 式(b)可以写成如下形式

$$J(u)=-2\left[q,\frac{dT}{dx}\right]_\Omega-\left[q,\frac{q}{k}\right]_\Omega-2[T,Q]_\Omega+[T,qn]_{\partial\Omega_q} \tag{f}$$

5.4 证明在题 5.3 中导出的函数是对应于恒定热传导的变分原理.

解 ☞ 在题 5.3 中导出的有关变分原理的变量是 $u=\{T\quad q\}$. 由此知 $\delta J(u)/\delta(u)=0$ 或者分别取 $\delta J(u)/\delta T=0$ 和 $\delta J(u)/\delta q=0$，可以产生控制方程. 题 5.3 中的式(f)可以写成相似的积分形式

$$J(u)=\int_{\Omega}\left(-2q\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}-\frac{q^2}{k}-2TQ\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega_q}Tqn\mathrm{d}x \tag{a}$$

和

$$\frac{\delta J(u)}{\delta q}=\int_{\Omega}\left(-2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\quad 2\frac{q}{k}\right)\delta q\mathrm{d}x=0 \tag{b}$$

括弧中的项等于

$$k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+q=0$$

由此式可得到式(a)给出的函数关于时间的变化,或者用散度原理消掉 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$.回想一下题 5.3 中的式(e)并代入到上面的式(a)可得到

$$J(u)=\int_{\Omega}\left(2T\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}-\frac{q^2}{k}-2TQ\right)\mathrm{d}x \tag{c}$$

和

$$\frac{\delta J(u)}{\delta T}=\int_{\Omega}\left(2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}-2Q\right)\delta T\mathrm{d}x=0 \tag{d}$$

此外,括弧中的项就是控制方程

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}-Q=0$$

5.5 证明第二章中用来推导有限元模型的变分函数,能够通过扩展由题 5.3 中的式(f)给出的变分原理得到.

解 ☞ 第二章中的变分函数是题 5.3 中式(f)的特殊情况,并且常被称为扩展的变分原理.未知函数是温度 T 和热流 q,同时希望消去 q.假设控制方程 $q=-k(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)$ 完全满足并被代入到式(f)右侧的第一和第二项:

$$J(u)=2k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}-k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}-2[T,Q]_{\Omega}+[T,qn]_{\partial\Omega_q}$$

或

$$J(u)=k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}-2[T,Q]_{\Omega}+[T,qn]_{\partial\Omega_q} \tag{a}$$

式(a)等价于由式(2.23)给出的积分形式.关于 T 的变化将得到控制微分方程.此外,使用本章的方法构造变分原理还可以得到有关边界条件的信息.使用散度原理可导出流上的边界条件.当然,在 T 上也有边界条件,关于此类边界条件的将在后面的例题中讨论.

5.6 证明第二章中定义了具有对流项的物质输运方程,关于式(5.8)的双线性影射不是自伴随的.

解 ☞ 使用式(2.16)和(2.17)构造相似于式(5.1)的方程:

$$J(u)=\{C\quad j\}\begin{bmatrix}K_r+u\mathrm{d}/\mathrm{d}x & \mathrm{d}/\mathrm{d}x\\ -\mathrm{d}/\mathrm{d}x & -1/D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C\\ j\end{Bmatrix}-2\{C\quad j\}\begin{Bmatrix}m\\ 0\end{Bmatrix} \tag{a}$$

由此得

$$J(u)=\left[C,K_rC+u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}+\left[C,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}-\left[j,\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}-\left[j,\frac{j}{D}\right]_{\Omega}-2[C,m]_{\Omega} \tag{b}$$

如同在题 5.3 中的式(e)那样,可以证明对于非对角元素满足对称性:

$$\left[C,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}=-\left[\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x},j\right]_{\Omega}+[C,jn]_{\partial\Omega_j}$$

式(b)中括弧中的首项不满足基本的判别式,并可写成两部分

$$[C,K_rC]_{\Omega}+\left[C,u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega} \tag{c}$$

则,式(c)中的首项满足式(5.7).但是第二项可以像题 5.3 的式(d)那样进行分部积分,并可以证明此项对于均匀的边界条件不是自伴随的:

$$\left[C,u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega}=CuC\Big|_0^L-\int_0^L\left(u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right)C\mathrm{d}x=-\left[u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x},C\right]_{\Omega}=-\left[C,u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{\Omega} \tag{d}$$

式(d)表明,若使用 Rayleigh-Ritz 方法,式(2.24)中的项 $Cu(\mathrm{d}C/\mathrm{d}x)$ 将是零.因此式(2.24)被称作虚函数,然而,式(2.24)被用来成功的导出了一个局部有限单元,并且在问题 5.13 中可以显示此局部有限

单元是正确的,因此从这个事实观点来说式(2.24)关于除去式(5.8)的某些双线性影射是自伴随的.

5.7 静弹性方程可以用下标张量记号写成

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j \tag{a}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{b}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{c}$$

其中 σ_{ij}, ϵ_{ij}和 u_i 分别是应力,应变和位移.边界条件作用在位移和表面拖曳力:

$$u_i = \overline{u}_i \text{ 在 } \partial u \text{ 上} \quad \text{和} \quad t_i = \sigma_{ij}n_j = \overline{t}_i \text{ 在 } \partial t \text{ 上} \tag{d}$$

解 ☞ 使用式(5.4)推导一个包含边界条件的一般的变分原理.根据位移得到一个适合于有限元分析的扩展的变分原理.

定义式(5.4)的矢量为

$$\{u\} = \{u_m, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}, u_i, t_i\} \tag{e}$$

式(5.4)中的 f 和 g 项可以写成一个数组

$$\{f; g\} = \{f_m, 0, 0; \overline{t}_i, \quad \overline{u}_i\} \tag{f}$$

分号将定义在区域内部的量与定义在边界上的量区分开.对应式(5.4),算子方程可以构造为

$$J(u) = \{u\}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & & \\ 0 & C_{ijkl}\delta_{ik}\delta_{jl} & -1 & & \\ L & -1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_m \\ \epsilon_{ij} \\ \sigma_{ij} \\ u_i \\ t_i \end{Bmatrix} - 2\{u\}\begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \\ 0 \\ \overline{t}_i \\ -\overline{u}_i \end{Bmatrix} \tag{g}$$

其中 $L = \frac{1}{2}(\delta_{im}\partial/\partial x_j + \delta_{jm}\partial/\partial x_i)$.通过一个矩阵的乘法运算可以得到变分原理

$$\begin{aligned} J_1(u) = \{&-[u_m, \sigma_{mj,j}] + [\epsilon_{ij}, C_{ijkl}\epsilon_{kl}] - [\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}] + [\sigma_{ij}, \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})] \\ &- [\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}] - 2[u_m, f_m]\}_\Omega \\ &- [u_i, t_i]_{\partial t} - [t_i, u_i]_{\partial u} - 2[u_i, \overline{t}_i]_{\partial t} + 2[t_i, \overline{u}_i]_{\partial u} \end{aligned} \tag{h}$$

使用 Green-Gauss 原理重写首项,为

$$-[u_m, \sigma_{mj,j}]_\Omega = [u_{m,j}, \sigma_{mj}]_\Omega - [u_m, t_m]_{\partial t} \tag{i}$$

并与式(h)中的第四项和边界条件合并,得到

$$\begin{aligned} J_2(u) = \{&2[\sigma_{ij}, \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})] + [\epsilon_{ij}, C_{ijkl}\epsilon_{kl}] - 2[\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}] - 2[u_m, f_m]\}_\Omega \\ &- 2[u_i, \overline{t}_i]_{\partial t} + [t_i, 2\overline{u}_i - u_i]_{\partial u} \end{aligned} \tag{j}$$

通过假设式(b),(c)和(d)中的第一式完全成立,并因此可以从式(j)中消去,这样就可以由式(j)得到扩展的变分原理

$$J_3(u_i) = [\epsilon_{ij}, C_{ijkl}\epsilon_{kl}]_\Omega - 2[u_i, f_i]_\Omega - 2[u_i, \overline{t}_i]_{\partial t} + [t_i, u_i]_{\partial u} \tag{k}$$

由于 u_i 是作为常量或零作用在边界∂u 上,因此关于 u_i 的变化应为零,这样就可以消去最后一项.可以将式(k)与式(3.13)和在第三章导出的有关二维弹性的方程做一比较.由式(k)可以得到同样的结果.

5.8 在下面使用有时在连续力学中遇到的符号(见 Nickell 和 Sackman, 1968),给出了与时间相关热传导的热弹性方程.推导对应这些方程的变分原理.

解 ☞ 弹性:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j \tag{a}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{b}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - \beta\theta\delta_{ij} \tag{c}$$

热传导:

$$q_{i,i} + \rho T_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = r \tag{d}$$

$$q_i = -k_{ij}\theta_{,j} \qquad \theta = T - T_0 \tag{e}$$

$$\rho T_0 \eta = c\theta - \beta\varepsilon_{ij}\delta_{ij} \tag{f}$$

边界条件和初始条件

$$u_i = \bar{u}_i 在 \partial u 上 \qquad t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i 在 \partial t 上 \tag{g}$$

$$\theta = \bar{\theta} 在 \partial\theta 上 \qquad Q = q_i n_i = \overline{Q} 在 \partial Q 上 \tag{h}$$

$$u_i(t=0) = 0 \quad 和 \quad \theta(t=0) = T_0 \tag{i}$$

其中式(i)表示变形过程从静止开始且初始温度为 T_0, θ 在式(e)中定义.熵记为 η,其他所有符号已在前面定义.

将式(f)代入到式(d):

$$c\frac{\partial\theta}{\partial t} - \beta\delta_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + q_{i,i} = r \tag{j}$$

可将控制方程用式(5.2)给出的算子格式表示,并且可以证明,由于式(j)中时间导数的存在,式(5.1)或式(5.4)所要求的对称性并不存在.由式(5.11)的卷积双线性影射可推导出一个变分原理.式(j)中的时间导数可通过 Laplace 变换消去,代入初始条件,并转化就得到方程修改后的形式:

$$c[\theta - T_0] - \beta\delta_{ij}[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(0)] - g * q_{i,i} = g * r \tag{k}$$

其中由式(i)的第一式知 $\varepsilon_{ij}(0) = 0$ 且 $g = g(t) = 1$.变换后的方程包含温度的初始条件.场变量组织成为

$$\{u\} = \{u_k, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, q_i, \theta; u_i, t_i, \theta, Q\}$$

且

$$\{f;g\} = \{f_k, 0, 0, 0, g * r + cT_0; \bar{t}_i, -\bar{u}_i, g * \overline{Q}, -g * \bar{\theta}\}$$

使用式(a)-(c),式(e),(g),(h)的第一式,和式(k)可构造出算子 A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & 0 & & & & \\ 0 & C_{ijkl}\delta_{ik}\delta_{jl} & -1 & 0 & -\beta\delta_{ij} & & & & \\ L & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -g * k_{ij}\delta_{ij} & -g * \partial/\partial x_i & & & & \\ 0 & -\beta\delta_{ij} & 0 & g * \partial/\partial x_i & c & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & g * \\ & & & & & 0 & 0 & -g * & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $L = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\partial/\partial x_j + \delta_{jk}\partial/\partial x_i)$.如同在前一个例题讨论可得到变分原理,并可写为

$$\begin{aligned} J_1(u) = \{ & -[u_m^* \sigma_{mj,j}] + [\varepsilon_{ij}^* C_{ijkl}\varepsilon_{kl}] - [\varepsilon_{ij}^* \sigma_{ij}] - [\varepsilon_{ij}^* \beta\theta\delta_{ij}] \\ & + [\sigma_{ij}^* \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})] - [\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}] - [g * q_i^* k_{ij}^{-1} q_j] - [g * q_i^* \theta_{,i}] \\ & - [\beta\theta\delta_{ij}^* \varepsilon_{ij}] + [g * \theta * q_{i,i}] + [\theta * c\theta] - 2[u_m^* f_m] - 2\theta * [g * r + cT_0]\}_\Omega \\ & + [u_i^* t_i]_{\partial t} - [t_i^* u_i]_{\partial u} + [g * \theta * Q]_{\partial Q} - [g * Q * \theta]_{\partial\theta} \\ & - 2[u_i^* \bar{t}_i]_{\partial t} + 2[t_i^* \bar{u}_i]_{\partial u} - 2[g * \theta * \overline{Q}]_{\partial Q} + 2[g * Q * \bar{\theta}]_{\partial\theta} \end{aligned} \tag{l}$$

5.9 对于联立的热弹性问题推导一个适合有限元分析的扩展变分原理.

解 参照题5.8并假设式(b),式(e)和式(g)与(h)的第一式成立.使用 Green-Gauss 原理改变包含 $\sigma_{mj,j}$ 和 $q_{i,i}$ 的项为

$$-[u_m^* \sigma_{mj,j}]_\Omega = [u_{m,j} * \sigma_{mj}]_\Omega - [u_m * t_m]_{\partial t}$$

$$[g * \theta * q_{i,i}]_\Omega = -[g * \theta_{,i}^* q_i]_\Omega + [g * \theta * Q]_{\partial Q}$$

代入到题2.8的式(l):

$$\begin{aligned} J_2(u_i, \theta) = \{ & [\varepsilon_{ij} * C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}] + [g * k_{ii}\theta * \theta] + [\theta * c\theta] - 2[\varepsilon_{ii} * \beta\theta] \\ & - 2[u_m f_m] - 2[g * \theta * r] - 2[\theta * cT_0]\}_\Omega - 2[g * u_i * \bar{t}_i]_{\partial t} - 2[g * \theta * \overline{Q}]_{\partial Q} \end{aligned} \tag{a}$$

5.10 一维恒定状态下的热传导方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = \frac{Q}{k} \tag{a}$$

假设边界条件 $T(0)=T(L)=0$，则通过积分并代入边界条件得精确解为

$$T = \frac{Q}{2k}(x^2 - xL) \tag{b}$$

假设一个形如式(5.12)的三项解，使用 Galerkin 方法推导一个近似解.

解 ☞ 下面将说明数值分析中的 Galerkin 方法. 假设一个二阶方程的近似解将得到精确解，因为上面的式(b)本身就是二阶的. 假设

$$T_R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

代入边界条件得到

$$T(0) = 0 = a_0 \qquad 和 \qquad T(L) = 0 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2$$

或 $a_0 = 0$ 和 $a_2 = -a_1/L$，则假设解为

$$T_R = a_1\left(x - \frac{x^2}{L}\right) \tag{c}$$

代入到控制方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{Q}{k} = R$$

得到

$$-2\frac{a_1}{L} - \frac{Q}{k} = R \tag{d}$$

由于只有一个未知量 a_1，因此只有一个加权残量方程. 用式(5.14)表示为

$$\int_\Omega w_i(x) R(x;a_i)\mathrm{d}x = \int_0^L w_1(x) R(x;a_1)\mathrm{d}x = 0$$

或

$$\int_0^L \left(x - \frac{x^2}{L}\right)\left(-2\frac{a_1}{L} - \frac{Q}{k}\right)\mathrm{d}x = 0$$

积分，代入积分限解得 a_1 为 $a_1 = -QL/2k$. 将其代入到式(c)可得精确解式(b). 使用 Rayleigh-Ritz 方法可以得到题 2.3 中的相同结果. 如同在前面叙述得那样，当一个问题的变分原理存在的话，Rayleigh-Ritz 解和 Galerkin 解是相同的.

5.11 使用 Galerkin 方法和试验解

$$v_R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_4 x^4$$

求在题 2.1 和题 2.12 中分析的钢索问题的一个近似解.

解 ☞ 控制微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} - \frac{kv}{T} + \frac{f}{T} = 0 \qquad v(0) = v(L) = 0 \tag{a}$$

满足边界条件的试验解变成

$$v_R = a_2(x^2 - xL) + a_4(x^4 - xL^3) \tag{b}$$

将式(b)代入到式(a)得到残差

$$2a_2 + 12a_4 x^2 - \left(\frac{k}{T}\right)[a_2(x^2 - xL) + a_4(x^4 - xL^3)] + \frac{f}{T} = R$$

对应式(5.14)有两个加权方程

$$\int_0^L \left\{2a_2 + 12a_4 x^2 - \left(\frac{k}{T}\right)[a_2(x^2 - xL) + a_4(x^4 - xL^3)] + \frac{f}{T}\right\}(x^2 - xL)\mathrm{d}x \tag{c}$$

$$\int_0^L \left\{2a_2 + 12a_4 x^2 - \left(\frac{k}{T}\right)[a_2(x^2 - xL) + a_4(x^4 - xL^3)] + \frac{f}{T}\right\}(x^4 - xL^3)\mathrm{d}x \tag{d}$$

在积分之后式(c)和(d)变为

$$a_2\left(-\frac{1}{3} + \frac{kL^2}{30T}\right) + a_4\left(-\frac{3L^2}{5} - \frac{5kL^4}{84T}\right) = \frac{f}{6T}$$

$$a_2\left(-\frac{6}{10} - \frac{5kL^2}{84T}\right) + a_4\left(-\frac{12L^2}{7} - \frac{kL^4}{9T}\right) = \frac{3f}{10T}$$

代入 $L=120, T=600, f=2$ 和 $k=\frac{1}{2}$,解地 $a_2=-7.1603(10^{-4})$和 $a_4=-1.5816(10^{-9})$.近似解为

$$v_R=-7.1603(10^{-4})(x^2-xL)-1.5816(10^{-9})(x^4-xL^3)$$

与题2.12比较得到

结点2: $v_R(x=24)=1.7148, v(x=24)=1.8173$.

结点3: $v_R(x=48)=2.5974, v(x=48)=2.5444$.

5.12 使用 Galerkin 方法推导二维稳定状态热传导问题的一个四结点有限单元.

解 ☞ 我们将详细推导有限单元以说明形状函数是如何逼近式(5.12)中的多项式.稳定状态热传导问题的控制微分方程为

$$k_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-Q=0 \tag{a}$$

插值函数与题3.4中使用的相同.令 T_R 为近似解,则

$$T_R=N_1(x,y)T_1+N_2(x,y)T_2+N_3(x,y)T_3+N_4(x,y)T_4=[N]\{T\} \tag{b}$$

其中形状函数在题3.1的式(e)中定义,$\{T\}$是在每个有限单元结点处的未知温度并取代了式(5.12)中的系数 a_i.注意只有形状函数[N]是 x 和 y 的函数,且将式(b)代入到式(a)就得到关于 x, y 和$\{T\}$的一个残量函数.通常,结果可写为

$$k_x\frac{\partial^2 T_R}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 T_R}{\partial y^2}-Q=R(x,y;\{T\}) \tag{c}$$

作为帮助理解构成残差的过程,将式(b)代入到式(a)则得到写成矩阵形式的结果:

$$[\partial/\partial x\quad \partial/\partial y]\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{bmatrix}[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]\{T\}-[Q]=[R(x,y;\{T\})] \tag{d}$$

最终的结果是一个 1×1 的矩阵.式(5.14)的加权余量被公式化成一个矩阵方程(其中的 w_i 被[N]替代)和在一个体积上的积分,即 $\int_V[N]^T[R(x,y;\{T\})]dV=0$.式(d)的首项变成

$$\int_V[N]^T\left[k_x\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}k_x\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}k_x\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.\cdot k_x\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}\right]\{T\}dV=0 \tag{e}$$

最终的结果是一个被$\{T\}$后乘的 4×4 矩阵.式(d)的第二项为 $\int_V[N]^TQdV$.经过矩阵乘法之后,式(e)的首项表示如下,并可由散度原理(Green-Gauss 原理)转换成

$$\int_V\left(N_1k_x\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}+N_1k_y\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\right)dV=-\int_V\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}k_x\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y}k_y\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)dV$$

$$+\int_S\left(N_1k_x\frac{\partial N_1}{\partial x}n_x+N_1k_y\frac{\partial N_1}{\partial x}n_y\right)dS \tag{f}$$

式(f)的体积分相同于题3.5的式(c),并且显然关于局部刚度矩阵的最终结果也相同于题3.5的式(e).式(f)的面积分对应流边界条件.如同在前面叙述以及在这里说明的那样,Galerkin 方法总是给出有关自然边界条件的信息.热源项等于题3.5的式(f).

在有限元的论著中经常使用隐含上面所有情形的简写标记.将式(b)代入到式(c),得到

$$k_x\frac{\partial^2[N]}{\partial x^2}\{T\}+k_y\frac{\partial^2[N]}{\partial y^2}\{T\}-Q=R(x,y;\{T\}) \tag{g}$$

或用缩写形式为

$$[k]\frac{\partial^2[N]}{\partial x_i^2}\{T\}-Q=R(x,y;\{T\}) \tag{h}$$

由式(h)和式(e),上式可以写成

$$\int_V\left([N]^T[k]\frac{\partial^2[N]}{\partial x_i^2}\{T\}-[N]^TQ\right)dV=0 \tag{i}$$

式(h)和(i)中的矩阵[N]不同于式(d)中定义和在式(e)中使用的[N].物质常数矩阵还是像在式(d)中定义的那样是 2×2 的.定义形状函数矩阵和一个算子矩阵为

$$[N]=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix}\qquad [L]=\begin{bmatrix}\partial^2/\partial x^2 & 0\\ 0 & \partial^2/\partial y^2\end{bmatrix} \tag{j}$$

将式(j)代入到式(h)可得到式(d)的等价方程.由式(f)可得到最终的结果为

$$\int_V\left(\frac{\partial[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}[\mathrm{k}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{T}\}+[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}Q\right)\mathrm{d}V=\int_S[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{T}\}n_i\mathrm{d}S \tag{k}$$

分析中必须说明将要使用的[N], x_i, [k]和{T}的特殊形式,因为必须对应使用中的单元和坐标系.在下面的展开中将使用缩写形式以推导局部有限元.

5.13 使用 Galerkin 方法推导具有对流和化学反应的物质传输问题的一个四结点有限单元.将所得结果与第二章和第三章中导出的模型进行比较.此结果将证明在第二章和第三章中使用虚变分函数的公式是正确的.

解 ☞ 控制微分方程如式(3.2)所示,且仿照题 5.12 进行有限元的推导.假设一试验解 $T_R=[\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}$,其中[N]在题 5.12 中的式(d)中定义,将其代入到控制微分方程:

$$u_x\frac{\partial[\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}}{\partial x}+u_y\frac{\partial[\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}}{\partial y}-D_x\frac{\partial^2[\mathrm{N}]\{\mathrm{T}\}}{\partial x^2}-D_y\frac{\partial^2[\mathrm{N}]\{\mathrm{T}\}}{\partial y^2}+K_r[\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}-m=R(x,y;\{\mathrm{C}\})$$

定义矩阵

$$[\mathrm{u}]=\begin{bmatrix}u_x & 0\\ 0 & u_y\end{bmatrix}\quad[\mathrm{D}]=\begin{bmatrix}D_x & 0\\ 0 & D_y\end{bmatrix}\quad[\mathrm{K}_r]=\begin{bmatrix}K_r/2 & 0\\ 0 & K_r/2\end{bmatrix}$$

使用在前面例题中使用的过程,用形状函数(加权函数)相乘,在体积上积分,并令结果为零:

$$\int_V\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{u}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{C}\}-[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}]\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x_i^2}\{\mathrm{C}\}+[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{K}_r][\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}-[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}]\right)\mathrm{d}V=0 \tag{a}$$

注意式(a)中的[N]在题 5.12 中的式(j)中定义,且由于[N]被定义成一个 2×4 矩阵,因此用 $K_r/2$ 将 $[\mathrm{K}_r]$ 定义成一个 2×2 矩阵.再者,用 Green-Gauss 原理降低式(a)中第二项的阶数.最后的结果为

$$\int_V\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{u}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{C}\}+\frac{\partial[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}[\mathrm{D}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{C}\}+[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{K}_r][\mathrm{N}]\{\mathrm{C}\}-[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}]\right)\mathrm{d}V$$

$$=\int_S\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{D}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{C}\}\right)\mathrm{d}S \tag{b}$$

将形状函数或它们的导数代入到式(b)并执行指定的矩阵乘法.积分是平面区域上的,且最终结果与题 3.32 中的结果相同.扩散类型的流边界条件可由 Galerkin 方法的结果得到.

5.14 Aifantis(1979)讨论了耦合物质扩散的一个理论,并被应用到具有多重扩散性的物质上.时间相关方程为(使用下标记号)

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}+\frac{\partial j_{1i}}{\partial x_i}=m_1=-k_1C_1+k_2C_2 \tag{a}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t}+\frac{\partial j_{2i}}{\partial x_i}=m_2=k_1C_1-k_2C_2 \tag{b}$$

其中 C_1 和 C_2 是浓度,j_{1i}和j_{2i}是对应的流项.且 $m_1+m_2=0$.流项的一个一般表述可以写为

$$j_{1i}=-D_{11}\frac{\partial C_1}{\partial x_i}+D_{12}\frac{\partial C_2}{\partial x_i} \tag{c}$$

$$j_{2i}=+D_{21}\frac{\partial C_1}{\partial x_i}-D_{22}\frac{\partial C_2}{\partial x_i} \tag{d}$$

其中 $D_{12}=D_{21}$.使用 Galerkin 方法推导这一原理所对应的有限元表述.

解 ☞ 将式(c)和(d)分别代入到式(a)和(b)以获得控制方程.这有两个联立的二阶方程:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}-D_{11}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x_i^2}+D_{12}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x_i^2}+k_1C_1-k_2C_2=0 \tag{e}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t}-\mathrm{D}_{22}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x_i^2}+D_{12}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x_i^2}-k_1C_1+k_2C_2=0 \tag{f}$$

假设近似(试验)解为 $C_{1R}=[\mathrm{N}_1]\{C_1\}$和 $C_{2R}=[\mathrm{N}_2]\{C_2\}$,其中$[\mathrm{N}_1]$和$[\mathrm{N}_2]$是定义任何形状函数的任一矩阵.它们可能是相同的,但是为便于推导,将它们分别标识.矩阵$\{C_1\}$和$\{C_2\}$是对应的未知结点值.将它们代入到式(e)和(f):

$$[N_1]\frac{\partial\{C_1\}}{\partial t}-[D_{11}]\frac{\partial^2[N_1]}{\partial x_i^2}\{C_1\}+[D_{12}]\frac{\partial_2[N_2]}{\partial x_i^2}\{C_2\}+[k_1][N_1]\{C_1\}-[k_2][N_2]\{C_2\}=R_1 \quad (g)$$

$$[N_2]\frac{\partial\{C_2\}}{\partial t}-[D_{22}]\frac{\partial^2[N_2]}{\partial x_i^2}\{C_2\}+[D_{12}]\frac{\partial_2[N_1]}{\partial x_i^2}\{C_1\}-[k_1][N_1]\{C_1\}+[k_2][N_2]\{C_2\}=R_2 \quad (h)$$

式(g)和(h)式是残量,并通过乘以权函数被最小化.式(g)被$[N_1]$前乘,式(h)被$[N_2]$前乘.在体积上积分并令结果为零,得到

$$\int_V\Big([N_1]^T[N_1]\frac{\partial\{C_1\}}{\partial t}-[N_1]^T[D_{11}]\frac{\partial^2[N_1]}{\partial x_i^2}\{C_1\}+[N_1]^T[D_{12}]\frac{\partial_2[N_2]}{\partial x_i^2}\{C_2\}$$
$$-[N_1]^T[k_1][N_1]\{C_1\}+[N_1]^T[k_2][N_2]\{C_2\}\Big)dV=0$$

$$\int_V\Big([N_2]^T[N_2]\frac{\partial\{C_2\}}{\partial t}-[N_2]^T[D_{22}]\frac{\partial^2[N_2]}{\partial x_i^2}\{C_2\}+[N_2]^T[D_{12}]\frac{\partial_2[N_1]}{\partial x_i^2}\{C_1\}$$
$$-[N_2]^T[k_1][N_1]\{C_1\}+[N_2]^T[k_2][N_2]\{C_2\}\Big)dV=0$$

用Green-Gauss原理将阶导数降到一阶并代入流边界条件.最终的结果为

$$\int_V\Big([N_1]^T[N_1]\frac{\partial\{C_1\}}{\partial t}+\frac{\partial[N_1]^T}{\partial x_i}[D_{11}]\frac{\partial[N_1]}{\partial x_i}\{C_1\}-\frac{\partial[N_1]^T}{\partial x_i}[D_{12}]\frac{\partial[N_2]}{\partial x_i}\{C_2\}+[N_1]^T[k_1][N_1]\{C_1\}$$
$$-[N_1]^T[k_2][N_2]\{C_2\}\Big)dV=\int_{S_1}[N_1]^T[D_{11}]\frac{\partial[N_1]}{\partial x_i}\{C_1\}n_i dS_1-\int_{S_2}[N_1]^T[D_{12}]\frac{\partial[N_2]}{\partial x_i}\{C_2\}n_i dS_2 \quad (i)$$

$$\int_V\Big([N_2]^T[N_1]\frac{\partial\{C_2\}}{\partial t}+\frac{\partial[N_2]^T}{\partial x_i}[D_{22}]\frac{\partial[N_2]}{\partial x_i}\{C_2\}-\frac{\partial[N_2]^T}{\partial x_i}[D_{12}]\frac{\partial[N_1]}{\partial x_i}\{C_1\}-[N_2]^T[k_1][N_1]\{C_1\}$$
$$+[N_2]^T[k_2][N_2]\{C_2\}\Big)dV=\int_{S_2}[N_2]^T[D_{22}]\frac{\partial[N_2]}{\partial x_i}\{C_2\}n_i dS_2-\int_{S_1}[N_2]^T[D_{12}]\frac{\partial[N_1]}{\partial x_i}\{C_1\}n_i dS_1 \quad (j)$$

形状函数的下标表示使用不同的形状函数模拟$\{C_1\}$和$\{C_2\}$的过程.例如,$[N_1]$对应八结点单元,而$[N_2]$对应只有四结点的相同单元.当使用变分公式化时,这种形状函数的分离就不明显.然而,对此联立问题应用同一形状函数模拟这两个未知量.

在式(i)和(j)中还保留了时间导数;将在第七章对它们进行详细讨论.注意,由于形状函数与时间无关,因此时间导数将在结点变量上运算.

5.15 假设对题5.14中联立的扩散方程存在稳定状态条件和在x与y方向上的一个二维公式化.使用四结点矩形有限单元讨论局部刚度矩阵的公式化,其中假设$N_1=N_2=N$.

解 ☞ 消去时间导数并用定义刚度矩阵的每一项的紧凑形式表示式(i)和(j).

$$\begin{bmatrix}[K_{D11}+K_{k1}] & [-K_{D12}-K_{k2}]\\ [-K_{D21}-K_{k1}] & [K_{D22}+K_{k2}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{C_1\}\\ \{C_2\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{j_{11}\}\\ \{j_{22}\}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\{j_{12}\}\\ \{j_{21}\}\end{Bmatrix} \quad (a)$$

式(a)中的每一项在第三章中都有一个对应项.例如

$$[K_{D11}]=\int_0^a\int_0^b[B]^T[D_{11}][B]dxdy \quad (b)$$

其中像题3.4和题3.5中的那样,$[B]=[L][N]$.刚度项$[K_{D22}]$,$[K_{D12}]$和$[K_{D21}]$对于不同的扩散性矩阵有相似的定义,并且下标对应扩散性矩阵.注意$[K_{D21}]=[K_{D12}]^T$.此外,

$$[K_{k1}]\int_0^a\int_0^b[N]^T[k_1][N]dxdy \quad (c)$$

具有对$[K_{k2}]$相似的定义.式(c)给出的局部刚度矩阵与在题3.34中给出的结果相同,这里的化学反应系数K_r被物质相互作用系数k_1代替.注意如同在题5.13中说明的,由于$[N]$被定义成一个2×4矩阵,那么矩阵$[k_1]$和$[k_2]$应定义成2×2矩阵.

从式(a)形成的局部刚度矩阵不是对称的.式(a)右侧的边界条件项对应应用的边界条件流.另外,如果忽略了由刚度项定义的耦合$[K_{D12}]$和$[K_{D21}]$,那么就必须删除$\{j_{12}\}$和$\{j_{21}\}$,因为此时$[D_{12}]$应被假设为零.

5.16 将问题5.15中的方程降为x方向的一维情形.假设$D_{12}=0$并由Aifantis(1979)可得到所得方程的一个分析解.使用在题5.15中讨论的四结点矩形局部单元,求得一个三单元和一个五单元得解.将单元组织成如图5-1(a)所示的一条带.为得到理论解,假设

边界条件为 $C_1(0)=C_2(0)=0$, $C_1(L)=C_{1L}$和$C_2(L)=C_{2L}$. 与在 $D_{11}=D_{22}=0.005$, $k_1=0.04$, $k_2=0.03$. $C_{1L}=C_{2L}=100$, $L=1$ 和 $D_{12}=0$ 的假设下的解进行比较.

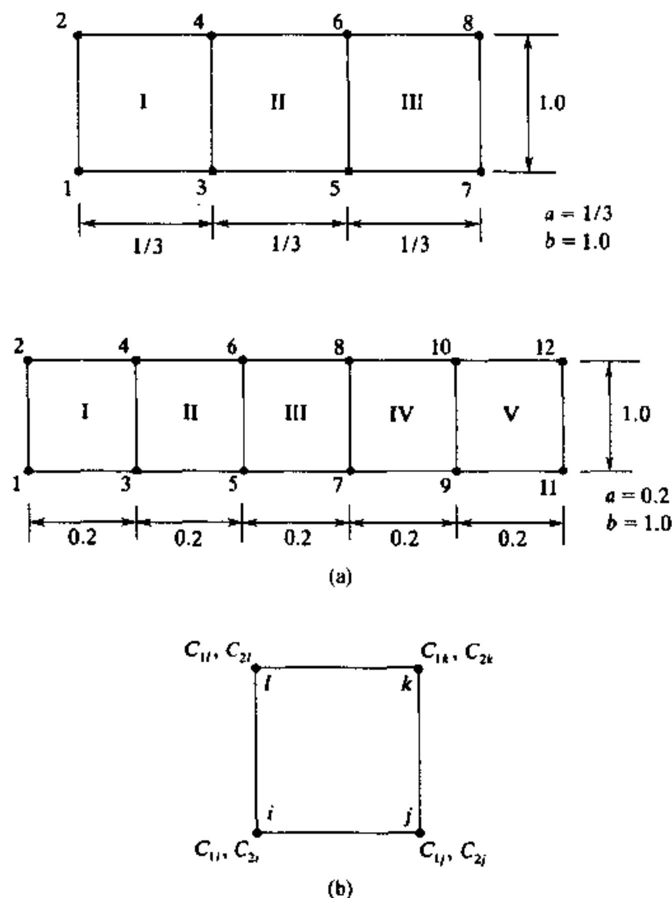


图 5-1

解 ☞ 一维情形的控制方程为

$$D_{11}\frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}x^2}-k_1C_1+k_2C_2=0 \qquad D_{22}\frac{\mathrm{d}^2C_2}{\mathrm{d}x^2}+k_1C_1-k_2C_2=0 \tag{a}$$

有解为

$$C_1=\gamma\sinh(\alpha x)+\frac{\beta x}{\alpha^2} \qquad C_2=\frac{Ax-D_{11}C_1}{D_{22}} \tag{b}$$

其中

$$A=\frac{D_{11}C_{1L}+D_{22}C_{2L}}{L} \quad \alpha^2=\frac{D_{22}k_1+D_{11}k_2}{D_{11}D_{22}} \quad \beta=\frac{k_2A}{D_{11}D_{22}} \quad \gamma=\frac{C_{1L}-\beta L/\alpha^2}{\sinh(\alpha L)}$$

题 5.15 的矩阵方程的形式导致其自身的结点编号系统满足,未知量 C_1 在前和未知量 C_2 在后. 由此得到局部有限单元如图 5-1(b)所示. 在计算机编程中的标准做法是在整体系统中组织未知量使得对于一个结点上的所有未知量都放在一起. 因此在组合成整体系统之前,最好重新组织行和列以适合整体系统. 可以使用题 3.24 中讨论的变换矩阵来完成这个行列调整. 使用图 5-1(b)的记号,此变换可写为$\{C\}_{new}=[T]\{C\}_{old}$:

$$\begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{1j} \\ C_{2j} \\ C_{1k} \\ C_{2k} \\ C_{1l} \\ C_{2l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{1j} \\ C_{1k} \\ C_{1l} \\ C_{2i} \\ C_{2j} \\ C_{2k} \\ C_{2l} \end{Bmatrix} \tag{c}$$

其中$[K]_{new} = [T][K]_{old}[T]^T$.

可使用三个相同的有限单元,并令 $a = \frac{1}{3}$ 和 $b = 1.0$,可得三单元的解.在变换之前局部刚度矩阵计算如下.

$$10^{-3}\begin{bmatrix} 6.4815 & -4.2593 & -2.1297 & 3.2408 & -1.1111 & -0.5555 & -0.2777 & 0.5555 \\ -4.2593 & 6.4815 & 3.2408 & -2.1297 & -0.5555 & -1.1111 & -0.5555 & -0.2777 \\ -2.1297 & 3.2408 & 6.4815 & -4.2593 & -0.2777 & -0.5555 & -1.1111 & -0.5555 \\ 3.2408 & -2.1297 & -4.2593 & 6.4815 & -0.5555 & -0.2777 & -0.5555 & -1.1111 \\ -1.4815 & -0.7407 & -0.3704 & -0.7407 & 6.1111 & -4.4445 & -2.2222 & 3.0556 \\ -0.7407 & -1.4815 & -0.7407 & -0.3704 & -4.4445 & 6.1111 & 3.0556 & -2.2222 \\ -0.3704 & -0.7407 & -1.4815 & -0.7407 & -2.2222 & 3.0556 & 6.1111 & -4.4445 \\ -0.7407 & -0.3704 & -0.7407 & -1.4815 & 3.0556 & -2.2222 & -4.4445 & 6.1111 \end{bmatrix}$$

将三个局部刚度矩阵组合起来,结果列于表 5.1 中.可使用五个相同的局部单元,并令 $a = 0.2$ 和 $b = 1.0$,可得五单元的解.

表 5.1　联立扩散问题

x	三单元解		五单元解		精确解	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	—	—	17.664	22.335	17.699	22.301
0.333	29.475	37.191	—	—	29.654	37.013
0.4	—	—	35.651	44.349	35.734	44.276
0.6	—	—	54.480	65.520	54.593	65.407
0.667	60.848	72.486	—	—	61.221	72.111
0.8	—	—	75.195	84.805	75.318	84.682
1.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

5.17　从题 5.8 中推导稳定状态热弹性问题的方程.使用 Galerkin 原理构造此问题的二维四结点有限单元公式.

解　☞ 此问题的公式化可以说明在位移解和温度解的耦合情形.控制温度分布的微分方程从控制位移的微分方程独立出来、然而,对两者构造一个单元公式是方便的并且是有效的.参见题 5.8;通过代入式(c)到式(a)并与式(d)和(e)合并,同时令$\partial/\partial t = 0$,可得到控制方程:

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} - \beta\theta_{,i} = -f_i, \tag{a}$$

$$k_{ij}\theta_{,ij} = -r \qquad k_{ij} = 0, \qquad i \neq j \tag{b}$$

由此知式(b)的一个有限单元公式与题 5.12 中的相同,只是 Q 被 $-r$ 所代替.读者可能已经猜到式(a)中的首项将要引出一个与问题 3.10 中给出的相同的局部刚度矩阵.但是,说明 Galerkin 法是如何导致相同的结果是很重要的.将一个物理问题的连续力学表述直接转换成问题的一般有限元表述是十分简单的.例如,式(a)和(b)变成

$$[K_{uu}]\{u\} - [K_{u\theta}]\{\theta\} = \{f\} + \{\bar{t}\} \tag{c}$$

$$[K_{\theta\theta}]\{\theta\} = \{r\} + \{\bar{Q}\} \tag{d}$$

每个矩阵的计算依赖于控制微分方程的结构.将使用 Galerkin 法详细推导方程中的成分$[K_{uu}]$和$[K_{u\theta}]$.

题 5.8 中的式(a)在弹性理论中称作平衡方程；二维情形时有两个方程. 下标张量方程可以扩展成式(3.4)和(3.5)，平面弹性的平衡方程. 题 5.8 中的式(c)应对应(3.6—(3.8)或(3.10)，(3.11)和(3.8)，平面应力或者平面应变，以及有关于应力和温度的附加项. 一般情况下，应力-应变-温度之间的关系可以写为

$$\sigma_{xx} = C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} - \beta\theta \tag{e}$$

$$\sigma_{yy} = C_{12}\epsilon_{xx} + C_{22}\epsilon_{yy} - \beta\theta \tag{f}$$

$$\sigma_{xy} = C_{33}\epsilon_{xy} \tag{g}$$

题 5.8 的式(b)给出的应变-位移关系是数学定义. 在有限元的公式化过程中应使用由式(3.3)给出的工程定义.

将式(e)—(g)代入到式(3.4)和(3.5)中得到

$$C_{11}\frac{\partial\epsilon_{xx}}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial\epsilon_{yy}}{\partial x} + C_{33}\frac{\partial\epsilon_{xy}}{\partial y} - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} + f_x = 0 \tag{h}$$

$$C_{12}\frac{\partial\epsilon_{xx}}{\partial y} + C_{22}\frac{\partial\epsilon_{yy}}{\partial y} + C_{33}\frac{\partial\epsilon_{xy}}{\partial x} - \beta\frac{\partial\theta}{\partial y} + f_y = 0 \tag{i}$$

式(3.4)和(3.5)的等价的矩阵形式可以写为

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \tag{j}$$

式(e)—(g)的等价的矩阵形式变成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix}[\theta] \tag{k}$$

应变在题 3.10 的式(h)中定义并代入到式(k)中，将上面的结果代入到式(j). 所得到的微分方程将出现在题 5.27 之中. 结点位移由题 3.10 中的式(e)—(g)定义. 应变由题 3.10 中的式(i)定义，并且它可以写成

$$\{\epsilon\} = [L_u][N_u]\{u\}$$

其中$[N_u]$对应一个四结点单元，由题 3.11 中的式(b)定义. 假设位移满足题 3.10 中的式(g)，并且假设温度为题 5.12 中的式(b)的形式. 两个试验解都是根据一个四结点矩形单元的形状函数假设而成，但是在现在的阶段，形状函数矩阵却表现不同，可写为

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix}_R = [N_u]\{u\} \quad 和 \quad \theta_R = [N_\theta]\{\theta\} \tag{l}$$

使用在题 5.12 中介绍的简写将号写出式(a)和(b)的加权余量(另外的细节见题 5.29.)

$$\int_V\left([N_u]^T[C]\frac{\partial^2[N_u]}{\partial x_i^2}\{u\} - [N_u]^T[\beta]\frac{\partial[N_\theta]}{\partial x_i}\{\theta\} + [N_u]^T[f]\right)dV = 0 \tag{m}$$

$$\int_V\left([N_\theta]^T[k]\frac{\partial^2[N_\theta]}{\partial x_i^2}\{\theta\} + [N_\theta]^T[r]\right)dV = 0 \tag{n}$$

将 Green-Gauss 原理应用到包含有导数的各项就得到最后的结果. 式(m)的首项被修改成将函数$[N_u]$变成一阶导数，而将二阶导数降低成一阶导数，如式(o)所示. 另外，还引入了在位移上的拖曳力边界条件. 使用 Green-Gauss 原理对式(m)的第二项进行了修改[见式(o)的第二项]，并且代入边界条件以增加了一项以热流形式表示的温度项. 本质方程，式(k)，表示拖曳力(应力)边界条件是一个位移和时间的函数[见问题 5.8 中的式(c)].

$$\int_V\left(\frac{\partial[N_u]^T}{\partial x_i}[C]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} - \frac{\partial[N_u]^T}{\partial x_i}[\beta][N_\theta]\{\theta\}\right)dV = \int_V[N_u]^T[f]dV$$

$$+\int_S\left([N_u]^T[C]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} - [N_u]^T[\beta]\frac{\partial[N_\theta]}{\partial x_i}\{\theta\}\right)n_i dS \tag{o}$$

$$\int_V\left(\frac{\partial[N_\theta]^T}{\partial x_i}[k]\frac{\partial[N_\theta]}{\partial x_i}\{\theta\}\right)dV = \int_V[N_\theta]^T[r]dV + \int_S[N_\theta]^T[k]\frac{\partial[N_\theta]}{\partial x_i}\{\theta\}n_i dS \tag{p}$$

式(o)和(p)直接对应式(a)和(b). 刚度矩阵$[K_{uu}]$在题 3.11 中导出；$[K_{\theta\theta}]$与题 5.12 的结果相符合，$\{f\}$、$\{\bar{t}\}$、$\{r\}$和$\{\bar{Q}\}$是体积力、表面拖曳力边界条件、热源和热流边界条件矩阵. 刚度矩阵有时称作偶

合矩阵，并将在题 5.18 和 5.30 中讨论.

5.18 构造在题 5.17 中定义的稳定状态热弹性问题的二维局部有限单元公式.使用在图 5-2 中定义的一维问题的解证明单元的精确性.使用在图 5-2 中所示的一个四单元条，计算每个结点处的位移和温度.对位移假设 $u(0)=u(L)=0$.对温度假设 $\theta(0)=\theta_0=100$ 和 $\theta(L)=0$.可假设物质常数为杨氏模数 $E=1$，泊松比率 $\nu=0$；$\beta_{11}=1$，$k_{11}=1$，并且 $\beta_{22}=k_{22}$在于有限元和精确解比较时可假设为零.参见题 3.13；弹性常数变为 $C_{11}=C_{22}=C_{33}=1$ 且 $C_{12}=0$.

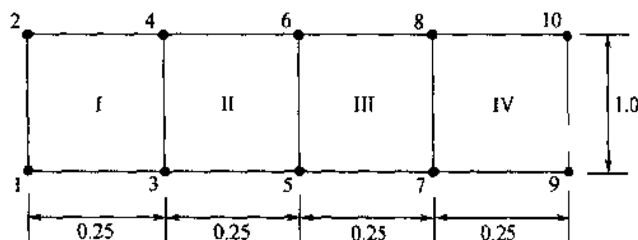


图 5-2

解 ☞ 一维控制微分方程为

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\beta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=0\qquad k\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{a}$$

有解

$$\theta=\theta_0\frac{L-x}{L}\qquad u=\beta\theta_0\frac{xL-x^2}{2EL} \tag{b}$$

有时(o)和(p)可构造出局部有限单元公式，偶合矩阵将在题 5.30 中给出.所有流类型的边界条件均为零，使用变换矩阵对局部单元重新编号，使之对应题 5.17 中式(c)和(d)中的顺序.最好在重新编号后在一个结点处的所有自由度都是连续.变换矩阵为

$$\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\\u_3\\v_3\\\theta_3\\u_4\\v_4\\\theta_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\\u_4\\v_4\\\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}$$

表 5.2　热弹性问题

x	有限单元解		精确解	
	u	θ	u	θ
0.0	0.0	100	0.0	100
0.25	9.375	75	9.375	75
0.50	12.500	50	12.500	50
0.75	9.375	25	9.375	25
1.00	0.0	0	0.0	0

其中$[K]_{new}=[T][K]_{old}[T]^{T}$.在表 5.2 中给出了最终的结果，对此基本问题有限元解与精确解一致.为证明在 y 方向上的有限元的公式化，相同的问题还可以用沿着 y 轴的单元带求解.

5.19 控制物质中电和变形相互作用的原理称作压电学，它对于研究微电子物质是很重要的．用下标表示的控制方程为

$$\sigma_{ij,j}=0 \qquad \sigma_{ij}=\sigma_{ji} \qquad i\neq j \tag{a}$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{b}$$

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}S_{kl}-e_{kij}E_k \tag{c}$$

$$D_{i,i}=0 \tag{d}$$

$$E_i=-\phi_{,i} \tag{e}$$

$$D_i=e_{ikl}S_{kl}+\varepsilon_{ik}E_k \tag{f}$$

其中 C_{ijkl}，e_{ikl}和ε_{ik}分别是弹性，压电和介电物质常数．为避免与介电常数（电容率）混乱，用 S_{ij}定义应变．应力，电子场，电子位移和势能分别用 σ_{ij}，E_i，D_i，和 ϕ 来定义，且忽略题 5.7 中的体积力．边界条件为

$$u_i=\overline{u}_i(\text{在 }\partial u\text{ 上}) \quad 与 \quad t_i=\sigma_{ij}n_j=\overline{t}_i(\text{在 }\partial t\text{ 上}) \tag{g}$$

$$\phi=\overline{\phi}(\text{在 }\partial\phi\text{ 上}) \quad 与 \quad d=D_in_i=\overline{d}(\text{在 }\partial d\text{ 上}) \tag{h}$$

使用 Galerkin 方法讨论对应此问题有限元表述的公式化过程．

解 ☞ 有限元公式化的构造用来说明，当弹性的位移方程（在第三章中讨论）与用 Laplace 方程描述的原理偶合时的问题的解．在此原理中位移和弹性势能完全偶合在一起，而在题 5.17 中描述的稳定状态的热弹性表示一个非偶合的原理．可以使用二维或三维有限单元来研究压电性．但是，当问题化为二维情形时，某些重要的作用将变成非偶合的．下面的讨论将是关于如图 5-3 所示的八结点线性单元．由于缺乏代数的总数因此就没有推导形状函数和局部单元矩阵．三维单元将在第七章中讨论．

使用在题 5.17 中使用的过程．将式(c)和(e)代入到式(a)，同时应记住应变通常是由式(b)中的位移来定义的．另外，将式(e)代入到式(f)并将结果代入到式(d)就得到控制方程：

$$C_{ijkl}S_{kl,j}+e_{kij}\phi_{,ij}=0 \tag{i}$$

$$C_{ikl}S_{kl,i}+\varepsilon_{ik}\phi_{,ik}=0 \tag{j}$$

应变是由位移的导数来定义的，并且位移和电势能可用形状函数和位移{u}和势能{ϕ}结点值来定义．将式(i)和(j)替换成等价的矩阵方程

$$\begin{aligned}&[C]\frac{\partial^2[N_u]}{\partial x_i^2}\{u\}+[e]\frac{\partial^2[N_\phi]}{\partial x_i^2}\{\phi\}=R_u\\&[e]\frac{\partial^2[N_u]}{\partial x_i^2}\{u\}-[\varepsilon]\frac{\partial^2[N_\phi]}{\partial x_i^2}\{\phi\}=R_\phi\end{aligned} \tag{k}$$

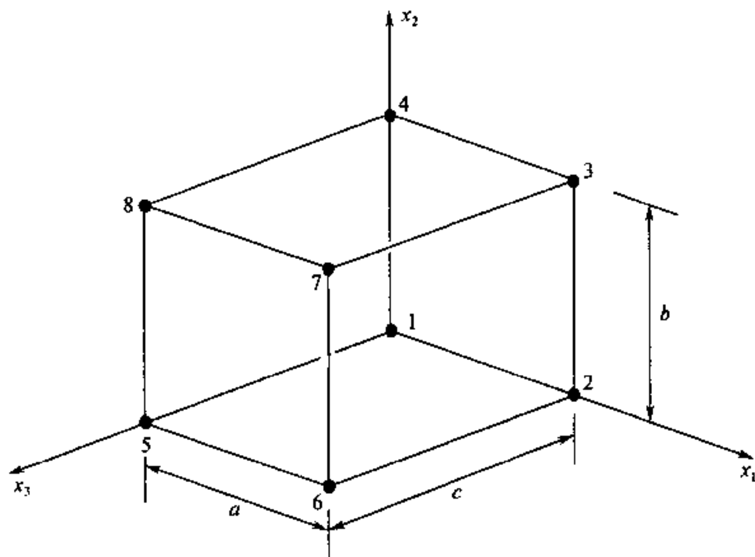


图 5-3

则形成的加权残量为

$$\int_V \left([N_u]^T[C]\frac{\partial^2[N_u]}{\partial x_i^2}\{u\} + [N_u]^T[e]\frac{\partial^2[N_\phi]}{\partial x_i^2}\{\phi\} \right) dV = 0$$

$$\int_V \left([N_\phi]^T[e]\frac{\partial^2[N_u]}{\partial x_i^2}\{u\} - [N_\phi]^T[\varepsilon]\frac{\partial^2[N_\phi]}{\partial x_i^2}\{\phi\} \right) dV = 0 \tag{l}$$

对所有含有二阶导数的项应用 Green-Gauss 原理：

$$\int_V \left(\frac{\partial[N_u]^T}{\partial x_i}[C]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} + \frac{\partial[N_u]^T}{\partial x_i}[e]\frac{\partial[N_\phi]}{\partial x_i}\{\phi\} \right) dV$$

$$= \int_S \left([N_u]^T[C]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} + [N_u]^T[e]\frac{\partial[N_\phi]}{\partial x_i}\{\phi\} \right) dS \tag{m}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial[N_\phi]^T}{\partial x_i}[e]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} - \frac{\partial[N_\phi]^T}{\partial x_i}[\varepsilon]\frac{\partial[N_\phi]}{\partial x_i}\{\phi\} \right) dV$$

$$= \int_S \left([N_\phi]^T[e]\frac{\partial[N_u]}{\partial x_i}\{u\} - [N_\phi]^T[\varepsilon]\frac{\partial[N_\phi]}{\partial x_i}\{\phi\} \right) dS \tag{n}$$

用缩写形式表示等价的有限元方程为

$$[K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{\bar{t}\}$$

$$[K_{u\phi}]^T\{u\} - [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{\bar{d}\} \tag{o}$$

其中

$$[K_{uu}]\int_V [B_u]^T[C][B_u]dV$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_V [B_\phi]^T[\varepsilon][B_\phi]dV$$

$$[K_{u\phi}] = \int_V [B_u]^T[e][B_\phi]dV$$

且$\{\bar{t}\}$和$\{\bar{d}\}$是作用的边界条件.如同在前一题中那样矩阵 B 被定义成一个算子矩阵与一个形状函数矩阵相乘.图 5-3 中的单元有八个形状函数,每结点处有四个自由度(未知量),三个位移,一个电势能.因此定义$\{u\}$和$\{\phi\}$为

$$\{u\} = [u_1\quad v_1\quad w_1\quad u_2\quad v_2\quad w_2\quad \cdots\quad u_8\quad v_8\quad w_8]^T \quad (24\text{ 项})$$

$$\{\phi\} = [\phi_1\quad \phi_2\quad \phi_3\quad \phi_4\quad \phi_5\quad \phi_6\quad \phi_7\quad \phi_8]^T \tag{p}$$

式(b)定义了矩阵$[B_u]$,但是应使用应变的工程定义.回顾前一个题,有$[B_u]=[L_u][N_u]$.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}}_{(24\text{ 列})} \tag{q}$$

式(q)的右侧是对应八结点砖形单元的$[L_u][N_u]$.对于电场矢量来说式(e)被用来定义矩阵$[B_\phi]$:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} [N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4\quad N_5\quad N_6\quad N_7\quad N_8] \tag{r}$$

式(r)的右手项为$[L_\phi][N_\phi]$.注意式(e)中的负号先前已经被包含在公式的推导过程中了.Nye(1957)已将物质矩阵列成表格,并可专用于任何的晶体类.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & \text{对称} & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \qquad [e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

补充习题

5.20 使用 Galerkin 方法求解题 2.1 所描述的钢索问题，并将结果与题 2.12 中给出的精确解进行比较. 假设试验解为 $v_R = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

5.21 在假设试验解为 $v_R = a_1\sin(\pi x/L)$，其中 L 式钢索的长度的情况下重做问题 5.20.

5.22 给定微分方程

$$u\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} - D\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x} - m = 0 \quad \text{且} \quad C(0) = C(L) = 0$$

假设有解 $C_R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$，使用 Galerkin 方法求的其一个近似解. 使用题 2.18 中给出的参数 $L = 1$ m, $D = 1.0(10^{-8})$, $u = 1.5(10^{-8})$，并设 $m = 1.0(10^{-4})$，将所得结果与精确解进行比较.

5.23 假设 $C_R = a_1x + a_2(1 - e^x)$，重做题 5.22.

5.24 证明题 5.12 中式(d)和(h)是等价的. 注意如同讨论的那样，[N]在每个方程中的定义不同. 当使用 Galerkin 方法推导有限元模型时，说明对[N]有不同定义的含义.

5.25 Gurtin 和 Yatomi(1979)建立了合成材料中两相扩散的一个一维数学模型. 它定义了一个自由相的浓度，并被假设其在硬性物质中扩散. 对自由相 C_f 的物质平衡由下式给出

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} + \frac{\partial j_f}{\partial x} = - m_f \tag{a}$$

对硬性物质，C_f 为

$$\frac{\partial C_r}{\partial t} = m_f \tag{b}$$

其中 j_f 是自由相流且 m_f 是被包容进来的自由相物质的比率. 对自由相的连续方程可假设为 Fick 定律：

$$j_f = - D\frac{\partial C_f}{\partial x} \tag{c}$$

和

$$m_f = \beta C_f - \alpha C_r \tag{d}$$

对应比率项. 由 Galerkin 方法推导此扩散原理所对应的有限元模型的公式

5.26 对于题 5.14 中给出的偶合扩散原理推导其一维稳定状态的局部有限单元.

5.27 证明题 5.17 中的式(j)和(k)与题 3.10 中的式(h)合并后可得到控制微分方程

$$\left(C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)u_e + \left(C_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v_e - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} + f_x = 0$$

$$\left(C_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_e + \left(C_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)v_e - \beta\frac{\partial\theta}{\partial y} + f_y = 0$$

5.28 构造对应题 5.17 中式(a)的加权余量的矩阵方程. 并使用此问题中所定义的四结点单元的形状函数.

5.29 构造对应题 5.17 中式(m)首项的矩阵方程. 将此矩阵方程与在题 5.28 中给出的解中对应项进行比较

5.30 对应一个四结点矩形单元推导题 5.17 中定义为$[K_{u\theta}]$的偶合刚度矩阵.

5.31 推导图 5-3 中八结点砖形单元的形状函数.

5.32 构造对应关于题 5.19 中给出的压电原理的式(5.2)和式(5.3)的算于 A 和 C.

5.33 推导关于在题 5.19 中给出的压电原理的一般的变分原理.

5.34 假设题 5.19 中的式(b)，式(e)，式(g)的第一式和式(h)的第一式完全满足，使用题 5.33 中的结论推导适合有限元分析的关于压电性的扩展的变分原理.

补充习题答案

5.20 由边界条件得到 $v_R = a_2(x^2 - xL)$，构造加权余量公式

$$\int_0^L\left[2a_2-\frac{k}{T}a_2(x^2-xL)+\frac{f}{T}\right](x^2-xL)\mathrm{d}x$$

和 $a_2\left(-\frac{1}{3}-kL^2/30T\right)=f/6T$.与表 2-2 相比, $v(x=24)=1.7455$, $v(x=48)=2.6183$.

5.21 将试解代入到题 2.1 中的式(e)就得到残量.形成的加权余量公式为

$$\int_0^L\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)R(x,a_1)\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^L\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[-\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)a_1\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\left(\frac{k}{T}\right)a_1\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{f}{T}\right]\mathrm{d}x=0$$

积分,解得 a_1:

$$a_1=\frac{4L^2f}{\pi(\pi^2T+kL^2)}$$

与表 2.2 比较, $a_1=2.7945$, $v(x=24)=1.6425$, $v(x=48)=2.6577$.

5.22 精确解为

$$C=\frac{m}{u}\left[x-\frac{L(1-e^{ux/D})}{1-e^{uL/D}}\right]$$

满足边界条件的试解为

$$C_R=a_2(x^2-xL)+a_3(x^3-xL^2)$$

积分后加权余量方程为

$$\frac{a_2D}{3}+a_3\left(\frac{uL^2}{60}+\frac{DL}{2}\right)+\frac{m}{6}=0$$

$$a_2\left(\frac{D}{2}-\frac{uL}{60}\right)+\frac{4DL}{5}+\frac{m}{4}=0$$

且 $a_2=-1204.8$, $a_3=-2409.6$. $C_R=(0.25L)=790.65$, $C(0.25L)=795.46$; $C_R(0.50L)=1204.8$, $C(0.50L)=1194.53$; $C_R(0.75L)=1016.5$, $C(0.75L)=1016.84$.

5.23 满足边界条件的试解为

$$C_R-a_1\left[x-\frac{L(1-e^x)}{1-e^L}\right]$$

积分后加权余量方程为

$$\frac{Da_1L^2}{(1-e^L)^2}\left(e^L-\frac{e^{2L}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{mL^2}{1-e^L}(L-e^L+1)-\frac{mL^2}{2}=0$$

代入参数,且 $a_1=1(10^4)$; $C_R(0.25L)=847.04$, $C_R(0.50L)=1224.95$, $C_R(0.75L)=999.32$.

5.24 执行指定的乘法则等价性即可得证.此外,在实际的应用中,由于使用形状函数得一阶导数推导有限元,因此[N]的重新定义没有结果.然而,对一个适当的推导,[N]的重新定义是必要的.

5.25 组合控制方程得

$$\frac{\partial C_f}{\partial t}-D\frac{\partial^2C_f}{\partial x^2}+\beta C_f-\alpha C_r=0\quad \frac{\partial C_r}{\partial t}-\beta C_f+\alpha C_r=0$$

假设 $C_f=[N]\{C_f\}$ 和 $C_r=[N]\{C_r\}$,并构造加权方程

$$[N]^T[N]\frac{\partial\{C_f\}}{\partial t}+\frac{\partial[N]^T}{\partial x}[D]\frac{\partial[N]}{\partial x}\{C_f\}+[N]^T[\beta][N]\{C_f\}-[N]^T[\alpha][N]\{C_r\}=[N]j_{fn}$$

$$[N]^T[N]\frac{\partial\{C_r\}}{\partial t}-[N]^T[\beta][N]\{C_f\}+[N]^T[\alpha][N]\{C_r\}=0$$

5.26 控制方程为

$$-D_{11}\frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}x^2}+D_{12}\frac{\mathrm{d}^2C_2}{\mathrm{d}x^2}+k_1C_1-k_2C_2=0$$

$$-D_{22}\frac{\mathrm{d}^2C_1}{\mathrm{d}x^2}+D_{12}\frac{\mathrm{d}^2C_2}{\mathrm{d}x^2}-k_1C_1+k_2C_2=0$$

仿照题 2.9 中得式(e)和题 2.11 中的式(d).假设一个结点编号为 i,j 的两结点线性单元

$$A\begin{bmatrix}\frac{D_{11}}{L}+\frac{k_1L}{3} & -\frac{D_{11}}{L}+\frac{k_1L}{6} & -\frac{D_{12}}{L}-\frac{k_2L}{3} & \frac{D_{12}}{L}-\frac{k_2L}{6}\\ -\frac{D_{11}}{L}+\frac{k_1L}{6} & \frac{D_{11}}{L}+\frac{k_1L}{3} & \frac{D_{12}}{L}-\frac{k_2L}{6} & -\frac{D_{12}}{L}-\frac{k_2L}{3}\\ -\frac{D_{12}}{L}-\frac{k_1L}{3} & \frac{D_{12}}{L}-\frac{k_1L}{6} & \frac{D_{22}}{L}+\frac{k_2L}{3} & -\frac{D_{22}}{L}+\frac{k_2L}{6}\\ \frac{D_{12}}{L}-\frac{k_1L}{6} & -\frac{D_{12}}{L}-\frac{k_1L}{3} & -\frac{D_{22}}{L}+\frac{k_2L}{6} & \frac{D_{22}}{L}+\frac{k_2L}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_{1i}\\ C_{1j}\\ C_{2i}\\ C_{2j}\end{Bmatrix}$$

5.28 对下式进行体积分

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} f = 0$$

注意在问题 5.17 的式(m)中使用的$[N_u]$必须被定义成一个 3×8 矩阵.见题 5.12,5.25,5.29 中得讨论.

5.29 必须重新定义形状函数矩阵.通过执行矩阵乘法和比较结果,可得到两矩阵方程等价性证明.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_1 \\ 0 & N_1 & N_1 \\ N_2 & 0 & N_2 \\ 0 & N_2 & N_2 \\ N_3 & 0 & N_3 \\ 0 & N_3 & N_3 \\ N_4 & 0 & N_4 \\ 0 & N_4 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \\ N_1 & N_1 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 & N_4 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

在矩阵乘法和应用 Green-Gauss 原理之后,可将矩阵写成题 5.17 式(o)的形式.

5.30 将刚度矩阵定义为题 5.17 式(o)中的第二项,且要计算得积分为

$$-\int_V \frac{\partial[N_u]^T}{\partial x_i}[\beta][N_\theta]dV$$

第一项是题 3.11 的式(c),且第三项是题 3.4 的式(e).物质矩阵必须连接一个 8×3 矩阵和一个 2×4 矩阵.通常矩阵表现为下式的积分

$$\begin{bmatrix} \partial N_{u1}/\partial x & 0 & \partial N_{u1}/\partial y \\ 0 & \partial N_{u1}/\partial y & \partial N_{u1}/\partial x \\ \partial N_{u2}/\partial x & 0 & \partial N_{u2}/\partial y \\ 0 & \partial N_{u2}/\partial y & \partial N_{u2}/\partial x \\ \partial N_{u3}/\partial x & 0 & \partial N_{u3}/\partial y \\ 0 & \partial N_{u3}/\partial y & \partial N_{u3}/\partial x \\ \partial N_{u4}/\partial x & 0 & \partial N_{u4}/\partial y \\ 0 & \partial N_{u4}/\partial y & \partial N_{u4}/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\theta 1} & N_{\theta 2} & N_{\theta 3} & N_{\theta 4} \\ N_{\theta 1} & N_{\theta 2} & N_{\theta 3} & N_{\theta 4} \end{bmatrix}$$

形状函数用 u 和 θ 做下标以表示公式形成过程中权函数的不同.在此运用中它们是相同的,并在第三章的题 3.1 和 3.5 中给出.注意如果能够写第一个矩阵为一个 8×2 的,写$[\beta]$矩阵为一个 2×2 的,那么可以得到同样的结果.但是上面的公式使得第一个矩阵对应题 5.17 式(o)中的第一个矩阵,这对计算机插值是很方便的.代入形状函数并在 $0\to a$ 和 $0\to b$ 上积分就得到最终的刚度矩阵:

$$\begin{bmatrix} -\beta_x b/6 & -\beta_x b/6 & -\beta_x b/12 & -\beta_x b/12 \\ -\beta_y a/6 & -\beta_y a/12 & -\beta_y a/12 & -\beta_y a/6 \\ \beta_x b/6 & \beta_x b/6 & \beta_x b/12 & \beta_x b/12 \\ -\beta_y a/12 & -\beta_y a/6 & -\beta_y a/6 & -\beta_y a/12 \\ \beta_x b/12 & \beta_x b/12 & \beta_x b/6 & \beta_x b/6 \\ \beta_y a/12 & \beta_y a/6 & \beta_y a/6 & \beta_y a/12 \\ -\beta_x b/12 & -\beta_x b/12 & -\beta_x b/6 & -\beta_x b/6 \\ \beta_y a/6 & \beta_y a/12 & \beta_y a/12 & \beta_y a/6 \end{bmatrix}$$

5.31 使用每结点处 3 个一维形状函数推导三维形状函数.令 N_{1-2}为结点 1 和 2 之间的形状函数.则 $N_{1-2}=(a-x_1)/a$.相似地,$N_{1-4}(b-x_2)/b$ 且 $N_{1-5}=(c-x_3)/c$.然后,$N_1=N_{1-2}N_{1-4}N_{1-5}$,或

$$N_1=\frac{(a-x_1)(b-x_2)(c-x_3)}{abc} \qquad N_2=\frac{x_1(b-x_2)(c-x_3)}{abc}$$

$$N_3=\frac{x_1x_2(c-x_3)}{abc} \qquad N_4=\frac{(a-x_1)x_2(c-x_3)}{abc}$$

$$N_5=\frac{(a-x_1)(b-x_2)x_3}{abc} \qquad N_6=\frac{x_1(b-x_2)x_3}{abc}$$

$$N_7=\frac{x_1x_2x_3}{abc} \qquad N_8=\frac{(a-x_1)x_2x_3}{abc}$$

5.32 $\{u\}=\{u_m, S_{ij}, \sigma_{ij}, D_i, E_i, \phi; u_i, t_i, \phi, d\}$

$\{f;g\}=\{0,0,0,0,0,0;\bar{t}_i, -\bar{u}_i, \bar{d}, -\bar{\phi}\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & C_{ijkl}\delta_{ik}\delta_{jl} & -1 & 0 & -e_{kij}\delta_{ik} & 0 & & & & \\ L & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \partial/\partial x_i & & & & \\ 0 & -e_{ijk}\delta_{ik} & 0 & 1 & -\varepsilon_{ik}\delta_{ik} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial x_i & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\partial/\partial x_j+\delta_{jk}\partial x_i)$$

5.33

$$
\begin{aligned}
J_1(u) = \{ & -[u_m, L\sigma_{ij}] + [S_{ij}, C_{ijkl}S_{kl}] - [S_{ij}, \sigma_{ij}] - [S_{ij}, e_{kij}E_k] \\
& + [\sigma_{ij}, Lu_m] - [\sigma_{ij}, S_{ij}] + [D_i, E_i] + [D_i, \partial\phi/\partial x_i] - [E_i, e_{ijk}S_{ij}] \\
& + [E_i, D_i] - [E_i, \epsilon_{ik}E_k] - [\phi, \partial D_i/\partial x_i]\}_\Omega \\
& + [u_i, t_i]_{\partial t} - [t_i, u_i]_{\partial u} + [\phi, d]_{\partial d} - [d, \phi]_{\partial\phi} \\
& - 2[u_i, \bar{t}_i]_{\partial t} + 2[t_i, \bar{u}_i]_{\partial u} - 2[\phi, \bar{d}]_{\partial d} + 2[d, \bar{\phi}]_{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

5.34

$$
J_2(u) = \{[S_{ij}, C_{ijkl}S_{kl}] - [E_i, \epsilon_{ik}E_k] - 2[S_{ij}, e_{kij}E_k]\}_\Omega - 2[u_i, \bar{t}_i]_{\partial t} - 2[\phi, \bar{d}]_{\partial d}
$$

第六章　等参数有限元方法

6.1　引言

前面几章中讨论了不同物理问题的局部有限元分析，以及有关矩形有限单元的应用.本章将重点讨论单元的几何形状以及插值函数与形状函数之间的关系，多数例题需要计算刚度矩阵的元素.在计算机代码发展的不同阶段，上述分析内容将用于编写计算机代码，以检验其计算结果.

本章将具体介绍等参数有限元的概念，重点阐述四边形单元的推导和应用，并对其他形状单元的结构加以介绍.而等参数四边形单元不符合笛卡儿坐标系的要求.作为一种重要的数值分析方法，有限元方法已可以用来模拟具有复杂边界条件的物理问题.从工程应用方面来讲，前面几章还有些理论研究的内容，但本章的内容将证明：有限元方法可以应用于科学和工程中的复杂问题.

在构造等参数有限元的过程中，数值积分发挥着重要的作用.一方面，现有的数值积分方法使有限元格式的推导显得比较复杂；另一方面，由于不需要计算面积积分的理论值，使得推导局部有限元格式的整体过程显得十分简便.

第三章中介绍了轴对称方面的问题，本章将对这类问题进行更为细致的研究.为解决这类重要的问题，采用数值积分法和等参数有限元方法是符合逻辑的选择.再有，四边形单元将用来介绍有限元方法的这些应用.

6.2　数值积分

数值积分广泛地应用于有限元分析之中.梯形积分公式等基本格式通常假设积分点是等距的，而且在将基本积分公式应用于有限元分析之中时，其适用性和精度受到了某些限制.为此在多数有限元应用的问题中，Gauss 求积公式成为了可以接受的数值积分格式.这里所谓的求积，指的是数值积分.一般说来，积分可以近似的计算为

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \tag{6.1}$$

这里的 x_k 为样本点(Gauss 点)，而 w_k 称为权.许多 Gauss 求积公式可以与式(6.1)共同使用，不过 Gauss-Legendre 求积公式是有限元分析中最流行的积分公式.其中的权和样本点由 Legendre 多项式所决定，大多数数值分析教材给出了其具体推导过程(例如，可以查阅 Scheid，1988).Gauss-Legendre 数值积分公式要求的积分区间是从 -1 到 $+1$，即

$$I = \int_{-1}^{+1} f(r)\mathrm{d}r = \sum_{k=1}^{n} w_k f(r_k) \tag{6.2}$$

在大多数有限元方法的应用中，采用形为式(6.2)的积分格式.Gauss-Legendre 数值积分公式可以容易地推广为二维或三维重积分的数值积分公式.

第三章中讨论了线性三角形有限单元的面积积分，本章将给出另外的线性三角形单元的数值积分公式和高阶三角形单元的数值积分公式.(见题 6.22)

6.3　插值公式和形状函数公式

在某些实例中，经常要推导高阶有限单元的插值公式和形状函数公式.下面将介绍的，是采用公式近似推导两类形状函数.

Lagrange 多项式

Lagrange 多项式是用于构造形函数的一种插值多项式，该多项式定义为

$$L_k = \prod_{\substack{m=0 \\ k \neq m}}^{n} \frac{x - x_m}{x_k - x_m} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \tag{6.3}$$

这里$\prod$表示所有各项的积.当 $x = x_k$ 时,上述乘积为 1;可是,当 $x = x_m$ 而 $m \neq k$ 时,上述乘积为 0.因而,式(6.3)中的 L_k 具有和形函数 N_k 相同的性质.采用 Lagrange 多项式、可以构造任意线性单元上的插值公式或形函数,并可以容易地将其推广到高维问题之中.(例如,参见题 6.3 和 6.23)

三角形形状函数

应用第三章中引入的面积坐标,可以推导出三角形有限单元上任意阶的形状函数.如图 3-12 所示的三角形单元,其面积坐标的定义与三角形单元的三条边有关,而与定义三角形单元的节点的个数是没有关系的.无论如何,高阶单元的节点个数和节点位置必须满足一定的条件(见题 6.18).由面积坐标表示的形状函数可以写为下面的公式

$$N_k = \prod_{m=1}^{n} \frac{F_m(L_1, L_2, L_3)}{F_{m \cdot L_1, L_2, L_3}} \tag{6.4}$$

这里 n 表示三角形单元的次序.形状函数的值 1 小于三角形单元一条边上节点的个数.函数 F_m 由通过除坐标点 k 以外的所有节点的 n 条直线满足的方程而得到,式中的分母是 F_m 在坐标点 k 处的计算值.

6.4 广义坐标

为了推导三角形单元刚度矩阵的需要,上节中讨论的面积坐标曾经在第三章中用于方便地计算面积积分.作为一种广义坐标,面积坐标是一类正规坐标.第三章中四节点矩形单元的刚度矩阵是利用等价于整体坐标系的局部坐标系推得的,且这里所用到的积分都是由封闭形式计算的初等积分.无论如何,面积积分的应用受到了复杂几何形状的限制,不过可以用相互连接的矩形来近似表示积分区域.本章中将采用不需要与整体坐标系保持一致的四边形单元来替代矩形单元,从而可以将四边形单元的应用推广到非矩形区域.如果试图采用整体坐标系下的解析解来给出面积积分,甚至包括四边形单元的面积积分,都将是非常冗长的,在有限元分析中得到广泛应用的广义坐标系则简化了面积积分的计算.这里将整体坐标表示的局部单元区域转化为边界位于 ±1 的标准单元,并在标准单元上进行数值积分运算.即采用边界位于 ±1 的标准单元,完成了可以用来定义整体坐标系中实际单元的几何形状和积分的数值计算,因而选择 Gauss-Legendre 求积公式(6.2)计算数值积分是十分明智的,不过必须给出单元形状函数在标准空间中的形式.另外,将标准几何形状单元变换到整体坐标空间的插值函数,在整体坐标系中定义了实际单元的几何形状.一般情况下,如上所述的坐标系和单元分别称为基本坐标和基本单元.

6.5 等参数单元

四边形等参数单元

如上一节中所述,等参数单元的基本性质就是标准空间中的单元满足适宜的结构.对于近似单元边界及内部物理参数的插值函数,如果两种近似过程采用了相同的节点位置,则相应的单元称为等参数单元.由此可得,不需要要求两个近似多项式的次数保持一致.如果用来确定单元形状的节点个数少于确定形状函数的节点个数,该单元称作亚参数单元;另外,如果用来确定单元形状的节点个数多于用来确定形状函数的节点个数,该单元称作超参数单元.本书将不对亚参数单元和超参数单元进行具体讨论.

为了建立具有实际意义的问题的局部刚度矩阵,需要计算形状函数的导数.在等参数结构中,不仅采用插值公式将局部单元的形状转化到广义空间中,同时也必须在广义空间中计算相

应的导数值,因此需要将坐标变换的数学关系写成函数的形式,供数值计算使用.需要请读者们注意的是,不要将关于坐标变换的数学运算与关于数值积分的数学运算相混淆,例如形状函数导数的计算等.之所以容易发生混淆,是由于在等参数有限单元中,形状函数的多项式形式和确定单元形状的插值函数是一致的,并且二者的记号常常相同.

非变形空间中使用(ξ,η)坐标表示的单元称为母单元.而变形的局部有限单元是由关于(ξ,η)坐标的坐标变换或插值函数定义的,其函数关系与形状函数的形式相同(见题6.5).由于物理参数的导数是(x,y)坐标系中的函数,而所应用的却是(ξ,η)坐标系中的单元,因此有必要使用关于偏导数的链式法则定义(ξ,η)坐标系中的导数,并将这些导函数转换成(x,y)坐标系中的形式.该变换过程中使用了Jacobi矩阵(见题6.6).经过上述变换以后,(ξ,η)坐标系下确定单元形状的插值函数就完全确定了.对于定义在(ξ,η)坐标系中的形状函数及其导数进行数值积分,可以计算出局部刚度矩阵.

三角形等参数单元

就坐标变换的基本概念而言,关于四边形单元的讨论内容对三角形单元来讲是同样有效的.然而,如果采用面积坐标定义三角形单元的形状函数,则两种坐标变换之间仍存在着显著的区别.在二维区域中,三个面积坐标可以定义一个三角形单元,但二维区域中母单元的坐标仅有两个,即ξ和η.在这种情况下,坐标变换的Jacobi矩阵将成为没有逆矩阵的长方形矩阵.不过,注意到三个面积坐标是线性相关的,其中的一个坐标可以由其他两个面积坐标的线性多项式表示出来,上述困难可以迎刃而解.另外,关于ξ和η的未变形区域的积分限必须改变为相应的三角形区域的积分限.不过,前面已经推导了具有一定精度的数值积分公式.题6.21讨论了三角形等参数单元.

6.6　轴对称表达式

与其他所有的二维公式的推导方法类似,本书同样讨论了轴对称问题的等参数单元.其主要区别是体积积分必须替换为$dV=2\pi r\cdot dr\cdot dz$.

对于控制方程为热传导方程的轴对称物理问题,题3.25概述了其有限元格式,并采用变分函数推导了基本的有限元方程.读者们可以从本章中看到,等参数有限单元和数值积分公式的应用,简化了此类轴对称问题的分析过程.

第三章简要介绍了轴对称弹性问题的控制方程.由式(3.17),并假设$v=\partial/\partial\theta=0$,可以得到模拟应变-位移的方程:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r}\qquad\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}\qquad\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}\qquad\varepsilon_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\tag{6.5}$$

不依赖于切向坐标θ的平衡方程是

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0\tag{6.6}$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0\tag{6.7}$$

材料常数矩阵由题3.26给出.关于(r,z)坐标的轴对称等参数单元的表示形式类似于笛卡儿坐标系下相应单元的表示形式,只不过应变项$\varepsilon_{\theta\theta}$的分母多了个$r$坐标.轴对称弹性等参数单元的表达式概括在题6.12到6.14之中.

圆柱面坐标(r,θ,z)中的拉普拉斯算子可以写为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{6.8}$$

轴对称表达式中则删去了对θ坐标的依赖性.第三章中的题3.25采用变分形式,推导了这类问题的有限元模型;采用Galerkin形式可以得到相同的结果.题6.17讨论了涉及热传导、扩散、静电分布等轴对称问题.

例题详解

6.1 考虑题 2.9，采用 Gauss-Legendre 数值积分公式计算一维线性有限元中体积力的积分.

解 ☞ 作为参考，需要计算的矩阵式为

$$A\int_0^L \begin{Bmatrix} (x-L)/L \\ x/L \end{Bmatrix} f\mathrm{d}x \tag{a}$$

由式(6.2)，采用 $n=2$ 的两点积分格式可以得到其真解. 从 $n=2$ 到 $n=5$ 的积分点的坐标和权系数见表 6.1(参见 Scheid, 1988).

表 6.1　Gauss-Legendre 积分公式的积分点坐标和权系数

n	x_k	W_k
2	±0.577 350 269	1.000 000 000
3	0.774 596 669	0.555 555 555
	0.000 000 000	0.888 888 888
	−0.774 596 669	0.555 555 555
4	±0.861 136 312	0.347 854 845
	±0.339 981 043	0.652 145 155
5	±0.538 469 310	0.478 628 670
	0.000 000 000	0.568 888 889
	±0.906 179 845	0.236 726 885

式(a)中积分的自变量必须变换为相应的积分限为从 −1 到 +1 的自变量，即 $x=(rL+L)/2$ 以及 $\mathrm{d}x=L\cdot\mathrm{d}r/2$. 要计算的积分为

$$AfL\int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix} (1-r)/4 \\ (r+1)/4 \end{Bmatrix}\mathrm{d}r \tag{b}$$

将 $n=2$ 时的积分点坐标和权系数代入第一项，得到(具有五位有效数字)

$$\left(\frac{AfL}{4}\right)\{[1-(0.577735)](1)+[1-(-0.577735)](1)\}=\frac{AfL}{2}$$

积分结果为精确的. 类似的，由第二项得到准确答案 $AfL/2$.

6.2 采用 $n=2$ 时的 Gauss-Legendre 积分公式求下式的数值积分

$$\int_0^a\int_0^b xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^2b^2}{4}$$

解 ☞ 利用 $x=(r+1)a/2, \mathrm{d}x=a\mathrm{d}r/2$ 和 $y=(s+1)b/2, \mathrm{d}y=b\mathrm{d}s/2$，将积分自变量进行修正，被积式化为

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{a}{2}(r+1)\frac{b}{2}(s+1)\frac{ab}{4}\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

或者，由式(6.2)有

$$\frac{a^2b^2}{16}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(r_i+1)w_i(s_j+1)w_j \tag{a}$$

计算式(a)，有

$$\frac{a^2b^2}{16}[\{(-0.577735+1)w_1[(-0.577735+1)w_1+(0.577735+1)w_2]\}$$
$$+\{(0.577735+1)w_2[(-0.577735+1)w_1+(0.577735+1)w_2]\}] \tag{b}$$

求式(b)的值，得到的真解为 $a^2b^2/4$.

6.3 对如图 6-1 所示的单元，利用 Lagrange 插值多项式推导其一维三节点形状函数. 特别地，对于长度为 L、中间有一个节点的单元，给出其具体的形状函数.

解 ☞ 将节点代入式(6.3)，有

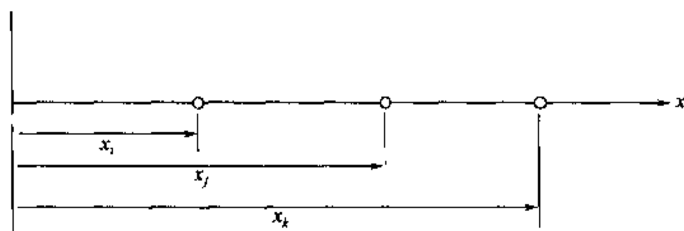


图 6-1

$$L_i = N_i = \frac{(x - x_j)(x - x_k)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)}$$

$$L_j = N_j = \frac{(x - x_i)(x - x_k)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)}$$

$$L_k = N_k = \frac{(x - x_i)(x - x_j)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}$$

设 $x_i = 0, x_j = L/2$ 和 $x_k = L$，并设相应的节点号为 1，2 和 3，有

$$N_1 = \frac{(x - L/2)(x - L)}{(-L/2)(-L)} \qquad N_2 = \frac{x(x - L)}{(L/2)(L/2 - L)} \qquad N_3 = \frac{x(x - L/2)}{L(L - L/2)}$$

6.4　推导四节点四边形等参数单元的插值函数.

解　由 Lagrange 多项式及图 6-2，节点 1 处的插值函数是一维空间中 $\xi = -1$ 和 $\eta = -1$ 处形状函数的积. 注意到插值函数与形状函数的一致性，节点 1 处的形状函数为

$$N_1 = L_{1\xi} L_{1\eta} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \frac{\eta - 1}{-1 - 1} = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

类似的，可以推得其他点的形状函数：

$$N_2 = L_{2\xi} L_{2\eta} = \frac{\xi + 1}{1 + 1} \frac{\eta - 1}{-1 - 1} = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$N_3 = L_{3\xi} L_{3\eta} = \frac{\xi + 1}{1 + 1} \frac{\eta + 1}{1 + 1} = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$N_4 = L_{4\xi} L_{4\eta} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \frac{\eta - 1}{1 + 1} = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}$$

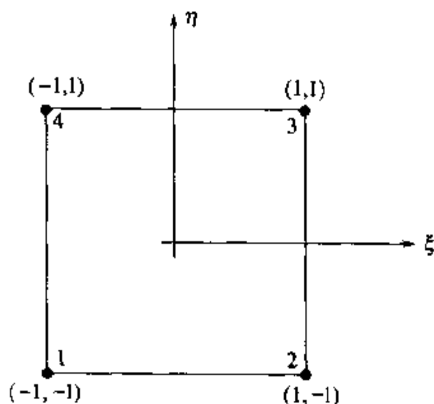


图 6-2

6.5　如图 6-3 所示的平面四边形单元模型，利用由题 6.4 给出的四边形插值函数证明坐标点 ($x = 7.0, y = 6.0$) 对应于广义空间中的点 (1, 1). 另外，对 $\xi = 0.5$ 和 $\eta = -0.5$，确定其在整体坐标系中的坐标.

解　利用题 6.4 中的记号，插值函数可以写为如下的形式：

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i \tag{a}$$

或

$$x = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)x_1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)x_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)x_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)x_4 \tag{b}$$

$$y = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)y_1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)y_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)y_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)y_4 \tag{c}$$

对单元Ⅲ，代入整体坐标系中的坐标值，有

$$x = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(2) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(5.5) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(7) + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(4) \tag{d}$$

$$y = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(3) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(3) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(6) + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(6) \tag{e}$$

将 $\xi = 1$ 和 $\eta = 1$ 代入式(d)和式(e)，计算得到相应的 x 和 y. 注意到式(d)中除了相应于节点 3 的第三项外，其他项均为零；类似的，式(e)中除了相应于节点 3 的第三项外，其他项也为零. 由此可见，插值函数和形状函数是相同的. 当 $\xi = 1$ 和 $\eta = 1$ 时，有 $N_3 = 1$ 和 $N_1 = N_2 = N_4 = 0$.

将 $\xi = 0.5$ 和 $\eta = -0.5$ 代入式(d)和式(e)，计算得到 $x = 5.0313$ 和 $y = 3.75$. 可以容易地证明，

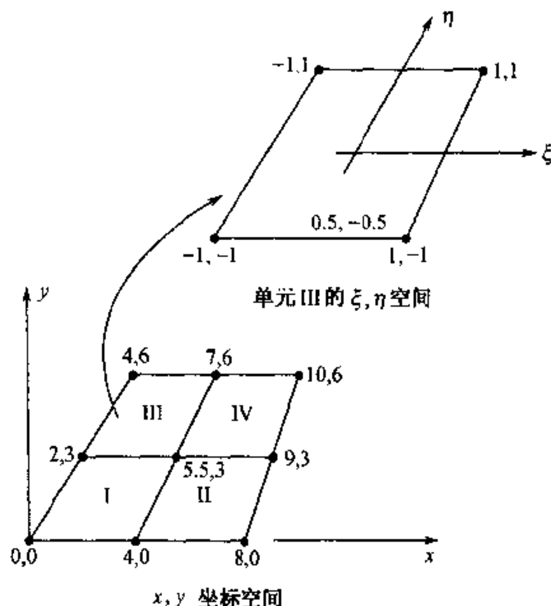


图 6-3

这些解表示了关于单元边界上和单元内部节点位置的线性变换.

6.6　如图 6-4(a)所示的等参数母单元和相应的如图 6-4(b)所示的等参数变形单元,试求出关于初始坐标 x, y 的偏导数与关于广义坐标 ξ, η 的偏导数之间的变换关系.

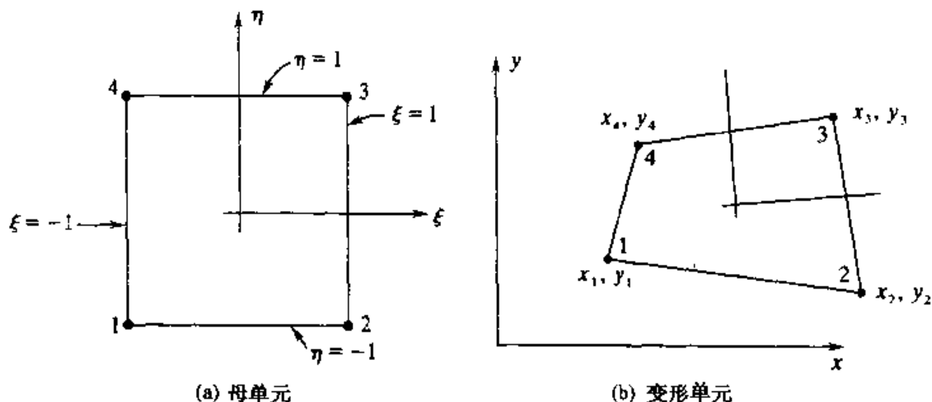


图 6-4

解　如题 6.4 所述,关于 ξ, η 的形状函数为

$$N_i = N_i(\xi, \eta) \qquad (N_i \text{ 为形状函数}) \tag{a}$$

又由题 6.5 式(a),以 ξ, η 坐标为自变量的 x, y 坐标为

$$x = x(N_i) = x(\xi, \eta) \quad y = y(N_i) = y(\xi, \eta) \qquad (N_i \text{ 为插值函数}) \tag{b}$$

由链式法则,形状函数的导数可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{c}$$

式(c)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \end{bmatrix} \tag{d}$$

将右式中的第一个矩阵记为 J,并称之为 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{c}$$

将式(d)的两端同乘以 J^{-1}，得到用于计算形函数关于 x, y 的偏导数的方程式：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{bmatrix}=J^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{f}$$

将问题 6.5 式(a)代入式(f)，得到的结果为

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i\\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{g}$$

注意：Jacobi 矩阵中的 N_i 是坐标系上的插值函数，而列矢量中的 N_i 是形状函数. 关于四边形有限单元的式(g)说明插值函数和形状函数都是线性函数，且这里的单元是等参数单元. 亚参数有限单元的构造形式也是完全一样的、只不过其 Jacobi 矩阵中的 N_i 可以是线性的(对应于四个坐标点的近似函数)，并且列矢量中的 N_i 可以是对应于任何多个节点的形状函数(例如，题 6.24 的九点单元).

另外，为了计算面积积分，在无穷小的单元上定义

$$dxdy=|\det J|\,d\xi d\eta \tag{h}$$

这里 $|\det J|$ 是 Jacobi 矩阵的行列式.

6.7　计算四节点等参数有限元的 Jacobi 矩阵.

解　☞ 由题 6.4 定义的插值函数及题 6.6 式(g)定义的 Jacobi 矩阵，欲求的 Jacobi 矩阵可以写为两个矩阵的乘积

$$J=\begin{bmatrix}\sum(\partial N_i/\partial \xi)\\ \sum(\partial N_i/\partial \eta)\end{bmatrix}[x_i, y_i]$$

或

$$J=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix} \tag{a}$$

此处定义的 J 可以推广到任意插值函数中去. 矩阵乘法的形式为 $[2\times n][n\times 2]$，这里 n 为单元形状变换用到的节点数. 对于定义在 (x, y) 坐标系中的单元，式(a)可用来计算 J 在 (ξ, η) 坐标系下的形式. 在有限元分析当中，式(a)也可以用来将数值积分和局部刚度矩阵的计算联系起来.

6.8　题 3.4 和 3.5 给出了推导热传导问题局部刚度矩阵的基本理论，即

$$[K]=\int_A [B]^T[k][B]t\,dxdy \tag{a}$$

这里 $[B]=[L][N]$(参见题 3.4 式(e)). 矩阵 $[B]$ 对应于题 6.6 等式(g)的左端项. 试给出四节点四边形等参数单元的矩阵 $[B]$ 的表达式.

解　☞ 当 $i=4$ 时，将题 6.6 式(g)展开，有

$$\begin{bmatrix}\partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial x\\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y & \partial N_4/\partial y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\partial N_1/\partial \xi & \partial N_2/\partial \xi & \partial N_3/\partial \xi & \partial N_4/\partial \xi\\ \partial N_1/\partial \eta & \partial N_2/\partial \eta & \partial N_3/\partial \eta & \partial N_4/\partial \eta\end{bmatrix} \tag{b}$$

J 的逆矩阵的分量可以由题 6.7 式(a)计算得到. 式(b)右端形状函数的导数项与 6.7 式(a)的矩阵是相同的. 值得注意的是：对于每个节点的自由度都为 1 的四节点等参数单元，上面的两个矩阵总是一致的；而式(b)表示形状函数，同时题 6.7 式(a)表示单元变换的插值函数. 式(b)是矩阵 $[B]$ 的表示形式.

6.9　如图 6-5 所示四边形单元. 试利用题 6.8 式(a)给出的定义，计算热传导问题的刚度矩

阵.这里假设热传导率为 $k_x = k_y = k = 1\text{Btu}/(\text{小时}\cdot\text{英寸}\cdot\text{华氏度})$,单元的厚度为 1.(这里 Btu 表示英国热量单位,等于 252 卡.)

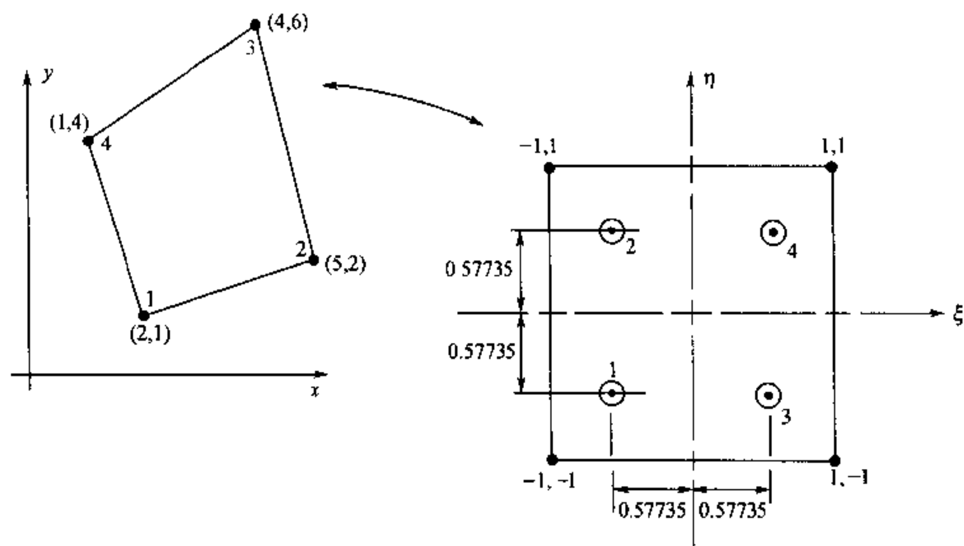


图 6-5

解 ☞ 题中的母单元如图 6-5 所示,这里将采用 2×2 的 Gauss 求积公式计算积分,其数值积分过程与题 6.2 中的式(a)类似.对图 6-5 中的每一个 Gauss 点,必须计算如题 6.8 中式(b)形式的矩阵[B].每次计算出矩阵[B]之后,就可以计算出刚度矩阵的一部分$[B]^T[k][B]$,将与所有四个 Gauss 点相对应的矩阵$[B]^T[k][B]$相加,则得到最终的刚度矩阵.因而,计算过程需要尽量的细致.请读者们注意,在进行计算机程序设计时,需要采用嵌套循环语句.对于 2×2 的 Gauss 求积公式,应该在 I 从 1 变化到 2 的循环中,嵌入另一个循环 J 从 1 变化到 2.在计算每一个 Gauss 点处的矩阵[B]之前,需要先计算该 Gauss 点处坐标变换的 Jacobi 矩阵.实际上,该矩阵可以由问题 6.7 式(a)计算得到.定义在(x,y)坐标系中的有限单元的二阶矩阵可以由图 6-5 经计算得到:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{a}$$

Gauss 点 1:

该 Gauss 点的坐标由表 6-1 得到,其位置如图 6-5 所示.设 $\xi_{i=1} = -0.57735$, $\eta_{j=1} = -0.57735$,由题 6.7 式(a)计算得到的 Jacobi 矩阵为

$$J_{11} = \frac{1}{4}[-(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4]$$

$$J_{11} = \frac{1}{4}[-(1+0.57735)(2) + (1+0.57735)(5) + (1-0.57735)(4) - (1-0.57735)(1)]$$

$$= \frac{1}{4}[-3.15470 + 7.88675 + 1.69060 - 0.42265] = 1.50$$

类似的

$$J_{12} = \frac{1}{4}[-(1+0.57735)(1) + (1+0.57735)(2) + (1-0.57735)(6) - (1-0.57735)(4)]$$

$$= \frac{1}{4}[-1.57735 + 3.15470 + 2.53590 - 1.69060] = 0.60566$$

$$J_{21} = \frac{1}{4}[-(1+0.57735)(2) - (1-0.57735)(5) + (1-0.57735)(4) + (1+0.57735)(1)]$$

$$= \frac{1}{4}[-3.15470 - 2.11325 + 1.69060 + 1.57735] = -0.5$$

$$J_{22} = \frac{1}{4}[-(1+0.57735)(1) - (1-0.57735)(2) + (1-0.57735)(6) + (1+0.57735)(4)]$$

$$= \frac{1}{4}[-1.57735 - 0.84530 + 2.53590 + 6.3094] = 1.60566$$

$$J = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.60566 \\ -0.5 & 1.60566 \end{bmatrix}$$

经初等矩阵运算，J 的逆矩阵为(见题 1.14)

$$J^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}}{|\det J|} \tag{b}$$

这里

$$|\det J| = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{21} \tag{c}$$

将其代入式(c)和式(b)得到 $|\det J| = 2.71133$，并且

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.59221 & -0.22338 \\ 0.18441 & 0.55324 \end{bmatrix} \tag{d}$$

设 $dA = dxdy = |\det J| d\xi\, d\eta = |\det J| w_{i=1} w_{j=1} = 2.71133$，并且权包含在计算之中. 注意，$2\times2$Gauss 积分的权为 1.

利用(ξ, η)坐标系下的形函数的导数，计算得到题 6.8 式(b)中的矩阵[B]. 其中的元素值与上面用来计算 J 的值相同(见题 6.8).

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} 0.59221 & -0.22338 \\ 0.18441 & 0.55324 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.57735 & 1.57735 & 0.42265 & -0.42265 \\ -1.57735 & -0.42265 & 0.42265 & 1.57735 \end{bmatrix} \tag{e}$$

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} -0.14544 & 0.25713 & 0.03897 & -0.15066 \\ -0.29088 & 0.01426 & 0.07794 & 0.19868 \end{bmatrix}$$

Gauss 点 1 对刚度矩阵的贡献可以写为

$$[K]_1 = [B]_1^T [k][B]_1 dA$$

其中 dA 的定义已在前面给出. 从而，有

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 0.28676 & -0.11265 & -0.07684 & -0.09728 \\ & 0.17982 & 0.03018 & -0.09735 \\ & \text{Symmetric} & 0.02059 & 0.02606 \\ & & & 0.16857 \end{bmatrix} \tag{f}$$

以下简略地给出了其他 Gauss 点的计算.

Gauss 点 2:

$$\xi_{i=1} = -0.57735 \quad 和 \quad \eta_{j=2} = 0.57735$$

$$J = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.89434 \\ -0.5 & 1.60566 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.56227 & -0.31318 \\ 0.17509 & 0.52527 \end{bmatrix}$$

$$|\det J| = 2.85567$$

$$[B]_2 = \begin{bmatrix} 0.06409 & 0.09250 & 0.18863 & -0.34522 \\ -0.22564 & -0.03700 & 0.12455 & 0.13809 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 0.15711 & 0.04077 & -0.04573 & -0.15216 \\ & 0.02834 & 0.03667 & -0.10578 \\ & 对称 & 0.14591 & -0.13685 \\ & & & 0.39479 \end{bmatrix} \tag{g}$$

Gauss 点 3:

$$\xi_{i=2} = 0.57735 \quad 和 \quad \eta_{j=1} = -0.57735$$

$$J = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.60566 \\ -0.5 & 1.89434 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.60246 & -0.19262 \\ 0.15902 & 0.47705 \end{bmatrix}$$

$$|\det J| = 3.14434$$

$$[B]_3 = \begin{bmatrix} -0.21722 & 0.31353 & -0.01230 & -0.08401 \\ -0.11311 & -0.12541 & 0.20492 & 0.03360 \end{bmatrix}$$

$$[K]_3 = \begin{bmatrix} 0.18859 & -0.16954 & -0.06448 & 0.45428 \\ & 0.35855 & -0.09293 & -0.09607 \\ & 对称 & 0.13251 & 0.02490 \\ & & & 0.02574 \end{bmatrix} \tag{h}$$

Gauss 点 4:

$$\xi_{i=2}=0.57735 \quad 和 \quad \eta_{j=2}=0.57735$$

$$J=\begin{bmatrix}1.5 & 0.89434\\ -0.5 & 1.89434\end{bmatrix} \quad J^{-1}=\begin{bmatrix}0.57602 & -0.27945\\ 0.15204 & 0.45611\end{bmatrix}$$

$$|\det J|=3.28868$$

$$[B]_4=\begin{bmatrix}-0.03213 & 0.16810 & 0.11991 & -0.25588\\ -0.06426 & -0.16380 & 0.23982 & -0.01176\end{bmatrix}$$

$$[K]_4=\begin{bmatrix}0.01697 & 0.01685 & -0.06334 & 0.02952\\ & 0.18116 & -0.06289 & -0.13512\\ & 对称 & 0.23642 & -0.11018\\ & & & 0.21577\end{bmatrix} \tag{i}$$

最终的刚度矩阵是式(f)、(g)、(h)以及式(i)的和:

$$[K]=\begin{bmatrix}0.64945 & -0.22456 & -0.25040 & -0.17449\\ & 0.74787 & -0.08897 & -0.43433\\ & 对称 & 0.53543 & -0.19606\\ & & & 0.80488\end{bmatrix} \tag{j}$$

6.10 在四节点等参数单元中,试将平面弹性问题的矩阵[B]与题 6.8 的热传导形式进行比较.

解 ☞ 回顾题 3.10 和 3.11,平面弹性问题中矩阵[B]的形式为[B]=[L][N].其中,[L]由题 3.10 中式(h)所定义,[N]由题 3.11 中式(b)所定义.与问题 3.11 中式(c)相对应的平面弹性问题中的矩阵[B]可以写为

$$[B]=\begin{bmatrix}\partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 & \partial N_4/\partial x & 0\\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y & 0 & \partial N_4/\partial y\\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial y & \partial N_4/\partial x\end{bmatrix} \tag{a}$$

矩阵[B]中的元素是由题 6.8 中的式(b)计算得到的.经过矩阵乘法运算,相应项一定赋值给上述 3×8 阶矩阵相应位置的元素.

6.11 对如图 6-5 所示的单元,推导关于线性等参数格式的平面弹性应力问题的刚度矩阵.这里假设 $E=1.0$, $\nu=0.25$,单位厚度 $t=1$.

解 ☞ 这里将采用 2×2 的 Gauss 求积公式计算积分,其中 Jacobi 矩阵和形状函数导数的计算与题 6.9 中的计算是一致的.为说明具体求解过程,下面将计算相对于第一个 Gauss 点的矩阵[B].对于如图 6-5 所示的 Gauss 点 1,设 $\xi_{i=1}=-0.57735$, $\eta_{j=1}=-0.57735$,则 Gauss 点 1 对矩阵[B]的贡献可以表示为(注:类似于题 6.9 中的$[B]_1$)

$$[B]_1=\begin{bmatrix}-0.14544 & 0 & 0.25713 & 0 & 0.03897 & 0 & -0.15066 & 0\\ 0 & -0.29088 & 0 & 0.01426 & 0 & 0.07794 & 0 & 0.19868\\ -0.29088 & -0.14544 & 0.01426 & 0.25713 & 0.07794 & 0.03897 & 0.19868 & -0.15066\end{bmatrix}$$

由式(3.6)、(3.7)和(3.8)计算得到材料常数的弹性矩阵[C]:

$$[C]=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{12} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0\\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0\\ 0 & 0 & E/2(1+\nu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0667 & 0.2667 & 0\\ 0.2667 & 1.0667 & 0\\ 0 & 0 & 0.4\end{bmatrix}$$

Gauss 点 1 对刚度矩阵的贡献是$[K]_1=[B]_1^T[C][B]_1 t dA$,这里 $dA=2.71133$ 是题 6.9 确定的.这一贡献由对称矩阵

$$[K]_1=\begin{bmatrix}0.15294 & 0.07647 & -0.11266 & -0.08262 & -0.04098 & -0.02049 & 0.00069 & 0.02664\\ & 0.26765 & -0.05633 & -0.05256 & -0.02049 & -0.07172 & 0.00035 & -0.14337\\ & & 0.19144 & 0.00663 & 0.03019 & 0.01509 & -0.10897 & 0.03461\\ & & & 0.07229 & 0.02214 & 0.01408 & 0.05385 & -0.03382\\ & & & & 0.01098 & 0.00549 & -0.00019 & -0.00714\\ & 对称 & & & & 0.01922 & -0.00009 & 0.03842\\ & & & & & & 0.10846 & -0.05411\\ & & & & & & & 0.13877\end{bmatrix}$$

给出. 重复上述计算, 对 Gauss 点 2, 有 $\xi_{i=1}=-0.57735$, $\eta_{j=2}=0.57735$, 对称矩阵$[K]_2$是

$$
[K]_2=\begin{bmatrix}
0.07066 & -0.02753 & 0.02753 & -0.02565 & 0.00472 & -0.04254 & -0.10298 & 0.09572\\
 & 0.15977 & -0.01860 & 0.03220 & -0.02329 & -0.07179 & 0.06943 & -0.12018\\
 & & 0.02763 & -0.00652 & 0.04789 & 0.00080 & -0.10311 & 0.02432\\
 & & & 0.01394 & 0.00784 & 0.00589 & 0.02432 & -0.05204\\
 & & & & 0.12611 & 0.04473 & -0.17872 & -0.02928\\
 & \text{对称} & & & & 0.08789 & -0.00299 & -0.02120\\
 & & & & & & 0.38481 & -0.09076\\
 & & & & & & & 0.19422
\end{bmatrix}
$$

类似的, 对 Gauss 点 2, 由于 $\xi_{i=2}=0.57735$, $\eta_{j=1}=-0.57735$, 其相应部分的刚度矩阵是对称矩阵

$$
[K]_3=\begin{bmatrix}
0.17435 & 0.05150 & -0.21058 & -0.02176 & -0.02019 & -0.03557 & 0.05642 & 0.00583\\
 & 0.10226 & 0.00453 & -0.03808 & -0.05482 & -0.07438 & -0.00121 & 0.01020\\
 & & 0.34948 & -0.08242 & -0.04526 & 0.05581 & -0.09364 & 0.02209\\
 & & & 0.17639 & 0.08210 & -0.09105 & 0.02209 & -0.04726\\
 & & & & 0.05332 & -0.00528 & 0.01213 & -0.02120\\
 & \text{对称} & & & & 0.14103 & -0.01496 & 0.02440\\
 & & & & & & 0.02509 & -0.00592\\
 & & & & & & & 0.01266
\end{bmatrix}
$$

此外, 对 Gauss 点 4, 有 $\xi_{i=2}=0.57735$, $\eta_{j=2}=0.57735$, 其相应部分的(对称)刚度矩阵是

$$
[K]_4=\begin{bmatrix}
0.00905 & 0.00453 & -0.00510 & -0.00959 & -0.03379 & -0.01689 & 0.02983 & 0.02196\\
 & 0.01584 & -0.00255 & 0.02982 & -0.01689 & -0.05913 & 0.01492 & 0.01347\\
 & & 0.13442 & -0.06037 & 0.01903 & 0.00952 & -0.14836 & 0.05340\\
 & & & 0.13128 & 0.03581 & -0.11128 & 0.03416 & -0.04983\\
 & & & & 0.12609 & 0.06305 & -0.11134 & -0.08196\\
 & \text{对称} & & & & 0.22066 & -0.05567 & -0.05025\\
 & & & & & & 0.22986 & 0.00660\\
 & & & & & & & 0.08661
\end{bmatrix}
$$

最终的(对称)刚度矩阵是上述四个分量矩阵的和, 即

$$
[K]=\begin{bmatrix}
0.40701 & 0.10497 & -0.30074 & -0.13962 & -0.09023 & -0.11550 & -0.01603 & 0.15014\\
 & 0.54552 & -0.07296 & -0.02862 & -0.11550 & -0.27701 & 0.08348 & -0.23988\\
 & & 0.70296 & -0.14268 & 0.05185 & 0.08122 & -0.45407 & 0.13441\\
 & & & 0.39392 & 0.14789 & -0.18235 & 0.13441 & -0.18295\\
 & & & & 0.31650 & 0.10798 & -0.27812 & -0.14037\\
 & \text{对称} & & & & 0.46880 & -0.07371 & -0.00944\\
 & & & & & & 0.74822 & -0.14418\\
 & & & & & & & 0.43227
\end{bmatrix}
$$

6.12 对轴对称弹性问题, 讨论矩阵[B]的导数.

解 ☞ 应力-位移关系的控制方程由式(3.17)给出, 其中 $\nu=\partial/\partial\theta=0$, 材料常数矩阵[C]由题3.26中式(d)给出. 通常的, 形状函数矩阵右乘一算子矩阵, 可以得到矩阵[B], 其中算子矩阵的形式是指定的. 至于轴对称弹性问题, 其具体形式决定于应力矩阵中应力的阶数或者应变矩阵中应变的阶数. 在这种情况下, 采用与题 3.26 式(a)相同的应变矩阵. 从而, 类似于第三章, 有$\{\varepsilon\}=[L][N]\{u\}$. 在这里的应用中, $\{u\}$是对应于四节点四边形单元八个未知位移的矩阵:

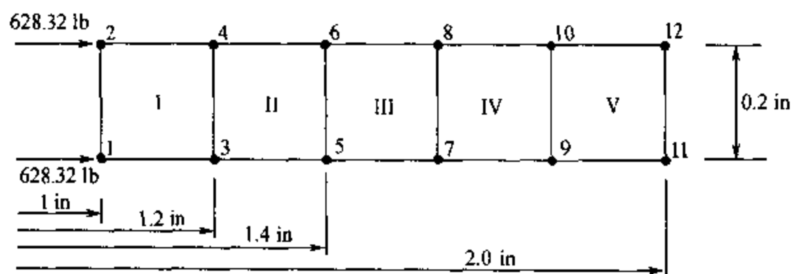
$$
\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial/\partial r & 0\\ 1/r & 0\\ 0 & \partial/\partial z\\ \partial/\partial z & \partial/\partial r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}\{u\} \tag{a}
$$

$$[B]=[L][N]=\begin{bmatrix}\partial N_1/\partial r & 0 & \partial N_2/\partial r & 0 & \partial N_3/\partial r & 0 & \partial N_4/\partial r & 0\\ N_1/r & 0 & N_2/r & 0 & N_3/r & 0 & N_4/r & 0\\ 0 & \partial N_1/\partial z & 0 & \partial N_2/\partial z & 0 & \partial N_3/\partial z & 0 & \partial N_4/\partial z\\ \partial N_1/\partial z & \partial N_1/\partial r & \partial N_2/\partial z & \partial N_2/\partial r & \partial N_3/\partial z & \partial N_3/\partial r & \partial N_4/\partial z & \partial N_4/\partial r\end{bmatrix} \quad \text{(b)}$$

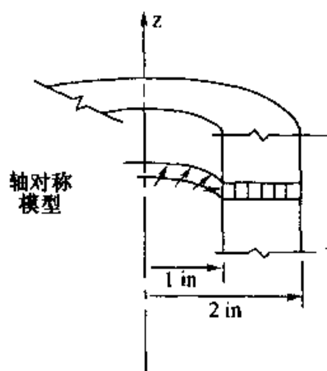
将题 6.8 中式(b)代入上面的式(b)、并分别用 r 和 z 代替 x 和 y，可以求出其中的导数项.形函数关于 r 的导数项由每点处的形状函数计算得到.例如，设 x 对应于径向坐标 r，题 6.5 中式(b)可以用来计算上面式(b)中的 r.题 6.5 中的 ξ 和 η 对应于(ξ, η)坐标系中积分点的坐标.将 Gauss 积分点的坐标代入相应的形状函数方程式，计算得到具体的形函数(见四节点四边形题 6.4).

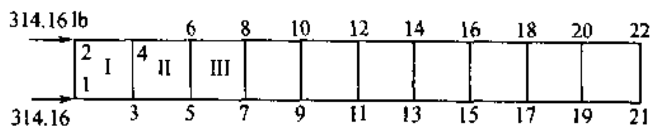
6.13　(a)设采用如图 6-6 所示的五个单元模型求解题 6.29 和 6.30 所述的长圆筒，圆筒的内、外径分别为 1 in 和 2 in，轴对称的内部压力荷载为 1000 lb/in^2.试计算相应于单元Ⅰ的矩阵[B]及局部刚度矩阵，并将径向位移的计算解与真解进行比较.这里 $E=1.0$ lb/in^2，$\nu=0.3$.

(b)将采用五个单元模型求解得到的结果与采用十个单元模型求解得到的结果进行比较(见图 6-6).



五单元的模型





十单元的模型

图 6-6

解　(a) 图 6-6 中的五个单元都是正方形单元，其边长为 0.2 in.在推导轴对称有限元模型的过程中，积分面积为 $2\pi r dr dz$，因而需要将内部压力沿圆筒的内侧进行分配.压力荷载转化成节点荷载为(1000 lb/in^2)(2π)(1 in)(0.2 in) = 1265.64 lb，该力的二分之一分别作用于节点 1 和 2.

对应于单元Ⅰ的矩阵[B]是与题 6.12 式(b)对应的 4×8 阶矩阵，由 $\xi_{i=1}=-0.57735$ 和 $\eta_{i=1}=-0.57735$，Gauss 点 1 处的矩阵[B]是

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} -3.9434 & 0 & 3.9434 & 0 & 1.0566 & 0 & -1.0566 & 0 \\ 0.5968 & 0 & 0.1599 & 0 & 0.0428 & 0 & 0.1599 & 0 \\ 0 & -3.9434 & 0 & -1.0566 & 0 & 1.0566 & 0 & 3.9434 \\ -3.9434 & -3.9434 & -1.0566 & 3.9434 & 1.0566 & 1.0566 & 3.9434 & -1.0566 \end{bmatrix}$$

注意到,与题6.11相同,整体刚度矩阵是由四部分组成的.每个积分点对应着一个单独的矩阵B,单元Ⅰ的刚度矩阵是8×8阶对称矩阵

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 3.74129 & 1.49024 & -2.64114 & 0.32221 & -1.98513 & -1.61107 & 0.60193 & -0.20136 \\ & 3.84644 & -0.34235 & 0.66457 & -1.71177 & -1.99370 & 0.20138 & -2.51730 \\ & & 4.30205 & -1.83260 & 0.76148 & 0.46318 & -1.98514 & 1.71177 \\ & & & 4.12838 & -0.46318 & -2.79924 & 1.61107 & -1.99370 \\ & & & & 4.30205 & -1.83260 & -2.64114 & 0.34235 \\ & \text{对称} & & & & 4.12838 & -0.32221 & 0.66457 \\ & & & & & & 3.74129 & -1.49024 \\ & & & & & & & 3.84644 \end{bmatrix}$$

题6.30给出了该问题的真解,其位移结果由表6.2所示.注意到该问题在 z 方向的所有位移均为零,因而可以把这个零位移边界条件代入计算解之中.

(b) 十单元模型的解采用的是0.1×0.1的正方形单元,节点1和2处的荷载是314.16磅,计算结果在表6.2中给出.表6.2中列出的较大的位移结果说明了材料常数 $E=1.0$ 磅/英寸^2 所起的作用.

表6.2　厚壁圆筒的径向位移(in)

r	五个单元	节点	十个单元	节点	真解
1.0	1894.35	1,2	1903.52	1,2	1906.67
1.1			1763.64	3,4	1766.42
1.2	1642.63	3,4	1649.94	5,6	1652.44
1.3			1556.37	7,8	1558.60
1.4	1472.46	5,6	1478.64	9,10	1480.76
1.5			1413.57	11,12	1415.55
1.6	1353.35	7,8	1358.79	13,14	1360.67
1.7			1312.50	15,16	1314.27
1.8	1268.72	9,10	1273.26	17,18	1274.96
1.9			1239.98	19,20	1241.61
2.0	1207.18	11,12	1211.76	21,22	1213.33

6.14　对题6.13所示的厚壁圆筒问题,计算其径向应力 σ_{rr} 和切向应力 $\sigma_{\theta\theta}$.

解　☞ 利用问题6.12中的矩阵[B],应变的计算格式为 $\{\epsilon\}=[B]\{u\}$;而由题3.10,应力可以计算为 $\{\sigma\}=[C]\{\epsilon\}$,但这里的

$$\{\sigma\} = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{rz}]^T \tag{a}$$

却是由题6.12中式(a)表示的应变分布所确定的.在有限元格式中,对所有四个应力都进行了计算,材料常数矩阵由题3.26给出.当采用等参数有限单元时,通常在Guass点计算出相应的应力,而实际上可以计算出单元内任意点的应力(单元内的 ξ,η 值必须对应相应的 x,y 位置).将题6.13中的矩阵 $[B]_I$ 与相应的位移矢量 $\{u\}_I$ 相乘,得到五个单元的模型中单元Ⅰ内Gauss点1的应变.注意到,对应于单元Ⅰ的位移矢量为

$$\begin{aligned}\{u\}_I &= [u_1 \quad w_1 \quad u_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad w_4 \quad u_2 \quad w_2]^T \\ &= [1894.35 \quad 0 \quad 1642.63 \quad 0 \quad 1642.63 \quad 0 \quad 1894.35 \quad 0]^T\end{aligned} \tag{b}$$

$$[\epsilon_{rr} \quad \epsilon_{\theta\theta} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{rz}]_1^T = [B]_1\{u\}_I = [-1258.60 \quad 1766.42 \quad 0 \quad 0]^T \tag{c}$$

应变和位移的结果太大,以至于不符合实际的情况.值得注意的是,本例中的材料常数 E 取为了0.1 lb/in^2,而实际材料的合理值应该是 10^7 lb/in^2 的量级.计算出的应力是(单位:lb/in^2)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{rz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.34615 & 0.57693 & 0.57692 & 0 \\ 0.57692 & 1.34615 & 0.57692 & 0 \\ 0.57692 & 0.57692 & 1.34615 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.38462 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}-1258.60\\ 1766.42\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-675.16\\ 1651.75\\ 292.97\\ 0\end{Bmatrix}$$

由题 6.5 的式(b)和式(c),分别用 x 和 y 代替 r 及 z,可以计算出单元 Ⅰ 内 Gauss 点 1 的位置.并且,由图 6-5 有 $\xi = -0.57735$ 和 $\eta = -0.57735$.

$$r = \frac{1}{4}[(1.57735)(1.57735)(1.0) + (0.42265)(1.57735)(1.2) + (0.42265)(0.42265)(1.2) + (1.57735)(0.42265)(1.0)] = 1.04226 \text{ in}$$

$$z = \frac{1}{4}[(1.57735)(1.57735)(0.0) + (0.42265)(1.57735)(0.2) + (0.42265)(0.42265)(0.2) + (1.57735)(0.42265)(0.0)] = 0.04226 \text{ in}$$

可以发现,单元Ⅰ内 Gauss 点 2 的结果是一样的.对单元内及其边界上的任何点,可以计算出该点处的应变和应力.无论如何,这里不能使用用于构造刚度矩阵的矩阵 B.新的矩阵 B 必须利用题 6.12 中的式(b),由对应于 r, z 坐标的 ξ, η 坐标推导得出.例如,为计算单元Ⅰ内节点 3 的应变,该点对应于 $\xi = +1$ 和 $\eta = +1$.

对于每个单元的所有 Gauss 点处的应力,经计算所得到的结果见表 6.3 和表 6.4.用公式(3.12) $\sigma_{zz} = v(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$ 计算出轴向应力的真解为常数 $\sigma_{zz} = 220$.

表 6.3 厚壁圆筒问题五单元模型的应力分布(单位:lb/in^2)

单元	Gauss 点 r(in)	有限元解			真 解	
		σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$
1	1.04226	−675.13	1651.86	293.02	−894.07	1560.73
1	1.15774	−849.19	1245.71	118.95	−661.43	1328.19
2	1.24226	−399.23	1250.15	255.28	−530.66	1197.33
2	1.35774	−504.43	1004.68	150.07	−389.95	1056.62
3	1.44226	−222.76	1007.26	235.35	−307.66	974.32
3	1.55774	−291.15	847.70	166.96	−216.14	882.81
4	1.64226	−103.18	849.33	223.85	−161.40	827.71
4	1.75774	−150.11	739.83	176.92	−98.22	764.88
5	1.84226	−18.44	740.94	216.75	−59.53	726.19
5	1.95774	−52.03	662.56	183.16	−14.55	681.21

表 6.4 厚壁圆筒问题十单元模型的应力分布(单位:lb/in^2)

单元	Gauss 点 r(in)	有限元解			真 解	
		σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$
1	1.02113	−824.22	1663.44	251.76	−945.38	1612.05
1	1.07887	−924.07	1430.47	151.92	−812.19	1478.85
2	1.12113	−635.44	1432.78	239.20	−727.44	1394.11
2	1.17887	−711.41	1255.52	163.23	−626.08	1292.75
3	1.22113	−489.33	1257.28	230.38	−560.83	1227.49
3	1.27887	−548.47	1119.29	171.24	−481.91	1148.57
4	1.32113	−373.94	1120.65	224.01	−430.59	1097.25
4	1.37887	−420.88	1011.13	177.08	−367.95	1034.62
5	1.42113	−281.23	1012.21	219.29	−326.86	993.53
5	1.47887	−319.11	923.84	181.42	−276.31	942.98
6	1.52113	−205.63	924.71	215.72	−242.91	909.58
6	1.57887	−236.63	852.37	184.72	−201.53	868.20
7	1.62113	−143.16	853.08	212.98	−174.01	840.68
7	1.67887	−168.86	793.13	187.28	−139.70	806.38
8	1.72113	−90.97	793.72	210.83	−116.77	783.44
8	1.77887	−112.50	743.47	189.29	−88.02	754.69
9	1.82113	−46.91	743.96	209.12	−68.70	735.36
9	1.87887	−65.13	701.43	190.89	−44.37	711.03
10	1.92113	−9.36	701.85	207.75	−27.93	694.60
10	1.97887	−24.93	665.54	192.18	−7.10	673.82

6.15 尽管是五单元模型，题 6.13 给出的轴对称圆筒问题的位移解也是相当准确的．但是，由题 6.14 解得的应力，却不甚精确，而是在真解附近震荡．试讨论轴对称圆筒问题应力的求解方法．

解 ☞ 应力解的欠精确性并不说明有限元方法无法给出满意的解，其缺点在于单元的剖分方法．在某些应用实例中，通过加密单元网格可以提高解的精度．也就是说，为了提高解的精度，可以使用更多的单元．当单元数趋向于无穷大时，有限元解将收敛到真解．在有限元法的这个应用中，采用较多的单元可以改进解的精度，但无法消除径向应力 σ_{rr} 的震荡性质．径向应力的计算公式是 $\sigma_{rr}=C_{11}\cdot \mathrm{d}u/\mathrm{d}r+C_{12}u/r$，这里的第一项取负值，第二项取正值．如果是线性元，单元内的所有点处的 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ 均为常数值．当 r 增加时，位移 u 减小，从而 u/r 也趋向于减小．在某一个单元内，最终结果 σ_{rr} 随着 r 的增加而增加．无论如何，读者需要参考题 6.31 并将 Gauss 点处的应力计算解与单元中心点处的应力计算解进行比较．

如果在径向采用高阶元，单元内的导数项 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ 将可以变化，因此有限元分析可以得到有效的改善．对比题 6.32 中四节点和八节点单元的解，对于有限元分析中用到的两个单元，线性元方法可以得到令人满意的解（如温度分布），其中节点处的解是十分重要的．对于导数起决定性作用的应用问题，读者需要注意线性元结构的限制．

6.16 设图 6-7 中所示的八节点四边形等参数单元受到均匀压力荷载的作用，即在由节点 1，8，4 确定的边界上受到沿 x 方向的力 $p_x=1.0$ 的作用．试采用三点 Guass 求积公式，计算每个节点所受到的压力荷载的分布情况．

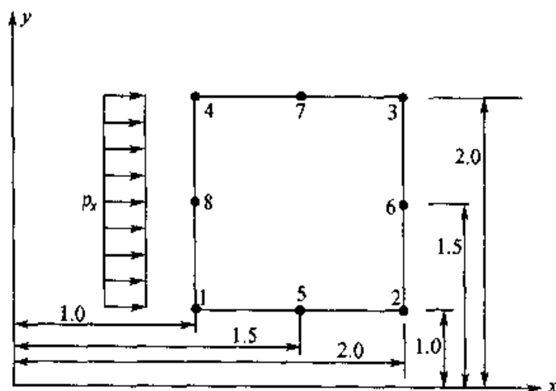


图 6-7

解 ☞ 计算格式与问题 3.12 类似．表面荷载分布可以表示为

$$\int_S [N]^{\mathrm{T}}\{T\}\mathrm{d}S \tag{a}$$

这里 $\{T\}$ 是表面牵引力矩阵，$[N]$ 是形状函数矩阵．这里的式(a)与题 3.12 中的式(b)是相似的，只不过是矩阵的行数是 16 而不是 8．沿着由节点 1，8，4 确定的边界上所受到的均匀压力，对应于等参数坐标 $\xi=-1$．除了节点 1，8，4 处以外，形状函数的值都为零．一般地，式(a)可以写为

$$\int_{-1}^{-1}\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} p_x = 1.0 \\ p_y = 0 \end{Bmatrix} \mathrm{d}\eta \tag{b}$$

对 $\xi=-1$，并由表 6.1 给出的 η 和权函数，可以通过数值积分计算 $\int_{-1}^{1} N_1 p_x \mathrm{d}\eta$．由题 6.25，可以给出形状函数．

$$N_1(\xi=1)=\frac{(1+1)(1-\eta)(1-\eta-1)}{4}=\frac{\eta^2-\eta}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} N_1 p_x \mathrm{d}\eta &= \{[(-0.774597)^2+0.774597](0.555555)+(0-0)(0.888888) \\ &\quad +[(0.774597)^2-0.774597](0.555555)\}p_x/2 = 0.333333p_x\end{aligned} \tag{c}$$

类似的，包括 N_4 的积分变为 $0.333333p_x$，积分对中心节点 8 的贡献为 $0.666667p_x$．等参数单元的周长是 2，结果表明每个角上的节点承担均匀荷载的六分之一，而中心节点承担均匀荷载的三分之二．

由式(c)给出的结果有可能通过直接求积得到.

前面的计算将作用力分配到了每一个节点上，大家应该利用等参数格式的优点来计算节点荷载.考虑图6-4(b)，等参数格式中的 dS 可以表示为插值函数.设单元的厚度 $t=1$ 或带着 t 完成推导过程，并记 $dS=t dL$（这里 dL 对应于平面区域的边界），则在笛卡儿坐标系中，有

$$dL = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} \tag{d}$$

参考题6.6中的式(b)，将 dx 和 dy 写成 (ξ,η) 坐标系中的形式

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \tag{e}$$

单元的边界将对应于 $\xi=\pm1$ 或 $\eta=\pm1$.设 $\xi=-1$，则对图6-4中的单元有 $\partial/\partial\xi=0$.利用题6.5中的式(a)，将式(e)改写为

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i d\eta \qquad (i = 1 \text{ 到 } 8) \tag{f}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i d\eta \qquad (i = 1 \text{ 到 } 8) \tag{g}$$

这里 N_i 是八个节点等参数单元上的插值函数.对于在图6-4(a)中表示的单元，假设沿曲线 $\xi=-1$ 采用三点数值积分公式：对于第一个积分点，取 $\xi=-1,\eta=-0.774597$.轴对称格式中的 $dS=2\pi r\cdot dL$，可以用来计算环绕圆筒的整个周面的压力分布.对其他Gauss点重复以上计算，最终结果为三个计算结果的和.

例如，对于图6-7中 (x,y) 坐标系下的单元，取 $\xi=-1,\eta=-0.774597$，然后代入式(f)和式(g)得到 $dx=0$、$dy=0.5$，又由式(d)有 $dL=0.5$.压力荷载的第一部分为

节点1：$(N_1)(p_x)(dL)(w_1)=(0.687298)p_x(0.5)(0.555555)=0.190916p_x$

节点4：$(N_4)(p_x)(dL)(w_1)=(-0.087298)p_x(0.5)(0.555555)=-0.024249p_x$

节点8：$(N_8)(p_x)(dL)(w_1)=(0.400)p_x(0.5)(0.555555)=0.111111p_x$

类似的，取 $\xi=-1,\eta=0.0$，以及 $dx=0$、$dy=0.5$ 和 $dL=0.5$.压力荷载的第二部分为（注意 $w_2=0.888888$）

节点1：$N_1=0.0$

节点4：$N_4=0.0$

节点8：$(1.0)p_x(0.5)(0.888888)=0.44444p_x$

第三个积分点对应于 $\xi=-1,\eta=+0.774597$，并且 $dx=0$、$dy=0.5$ 和 $dL=0.5$，而且 $w_3=0.55555$，该点贡献的压力荷载为

节点1：$-0.024249p_x$

节点4：$0.190916p_x$

节点8：$0.111111p_x$

以上三点贡献的荷载之和为总荷载，经计算有，节点1和4处的总荷载为 $0.166667p_x$，节点8处的总荷载为 $0.666666p_x$.

6.17 讨论题2.19和题6.37中轴对称静电分布的等参数有限元格式.

解 ☞ 在讨论Laplace算子以前，本书在前面的问题中研究了轴对称弹性问题.但是，物理问题的有限元格式包括所涉及的Laplace算子都有可能产生一种误导.考虑式(6.8)，注意到控制方程中不仅含有形状函数以及其导数项，而且还有其导数与坐标的商.无论如何，题3.25和6.37中的表达式表明了矩阵[B]的表达式与后来的轴对称问题的刚度矩阵表达式在笛卡儿坐标系中是一致的，只是 dV 的定义有所不同罢了.表达式相同只是一种巧合，请大家不要误以为包含Laplace算子的问题在轴对称圆柱坐标系和笛卡儿坐标系中的表达式是没有区别的.

6.18 对于线性三角形等参数单元及高阶三角形等参数单元，分别讨论其节点位置和面积坐标.

解 ☞ 如图6-8所示的线性元、二次元和三次元.其节点的编号顺序是任意的，但是通常顶点的编号为1,2和3，而边线上的内点则从节点1和2之间的点4开始进行编号.对于任意阶的三角形单元，其面积坐标对应于图3-12.例如，面积坐标 L_2 的值自节点2的对边开始增大.内部节点位于与三个顶点距离相等的地方，三次元中在单元边上的节点位于边长的三分之一处.

题3.2在推导线性三角形有限单元上的插值函数时，假设关于 x,y 的线性函数为

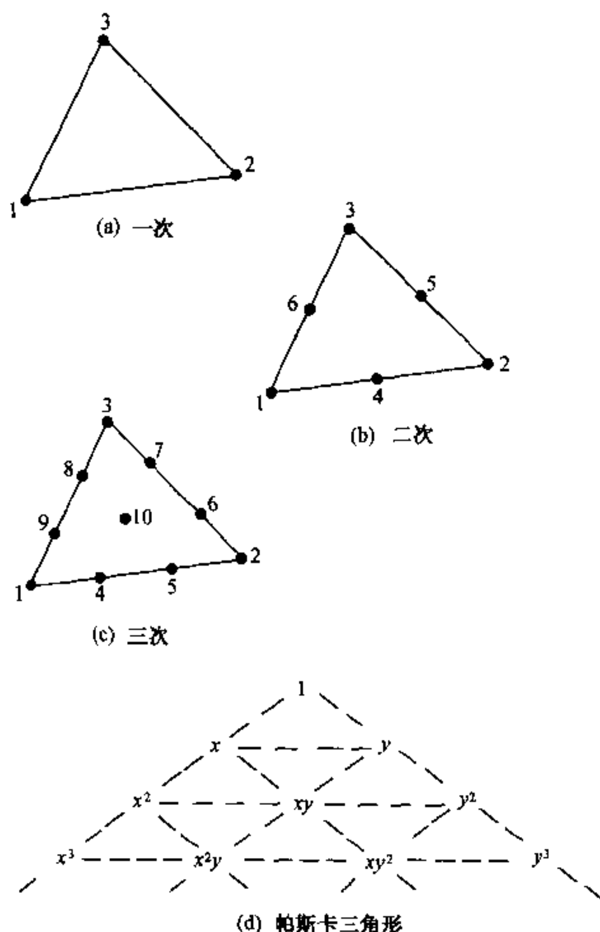


图 6-8

$$\phi = C_1 + C_2x + C_3y \tag{a}$$

因而二次三角形单元上的插值函数应该包含所有可能的线性项和二次项，即

$$\phi = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 \tag{b}$$

这个完整的插值函数多项式表达式与图 6-8(d)所示的帕斯卡三角形相对应．三次三角形单元上的插值函数应该包含所有可能的线性项、二次项和三次项，并且从帕斯卡三角形可知该多项式一共含有十项．因此，图 6-8(c)中的三次元必须有十个相应的节点，其中第十个节点位于三角形单元的形心．利用关于 x，y 的插值函数来推导形函数成为一项冗长的工作．式(6.4)以及面积坐标的应用简化了刚度矩阵的推导和构造．

6.19 利用节点数量与满足帕斯卡三角形要求的完全多项式表示形式之间的关系，讨论高阶等参数单元中的插值多项式．特别的，将六节点二次三角形单元、八节点协调元和九节点 Lagrange 单元进行比较．

解 ☞ 由于这些单元的每个边上都有三个节点，所以它们都可以视为二次元．题 6.18 对三角形单元进行了讨论，其中相应的插值函数包含有所有可能出现的二次项(见题 6.18 式(b))，而且没有更高阶的项．

对八节点协调元的形函数进行研究后发现，其中除含有线性项和二次项的六个常数以外，还含有两个三次项．也就是说，八节点单元上的插值多项式含有八项，其中的三次项为 $\xi^2\eta$ 和 $\xi\eta^2$．九节点 Lagrange 单元的形状函数由题 6.24 给出，其形状函数有两个附加的三次项和一个四次项，它们分别为 $\xi^2\eta$，$\xi\eta^2$ 和 $\xi^2\eta^2$．

可以肯定，四边形单元的形状函数不满足帕斯卡三角形的要求，它也不能表示为完全的多项式形式．无论如何，满足帕斯卡三角形的完全性要求是最可能的选择．高阶 Lagrange 单元中使用过多的内部节点将使方法难以得到较好的收敛性，因而需要尽量的避免使用过多的内部节点．其他内容请

参阅 Burnett(1987)或 Zienkiewicz 和 Taylor(1989)的书.

6.20 如图 6-8 所示的二次三角形有限元及三次三角形有限元,采用面积坐标表示其形状函数 N_4.

解 ☞ 二次元如图 6-9(a)所示,三角形的阶为 $n=3\ \ 1$,因而有两条直线通过除节点 4 以外的所有其他节点,也就是图中通过节点 2,5 和 3 的 $L_1=0$,以及通过节点 1,6 和 3 的 $L_2=0$.节点 4 的面积坐标为 $L_1=\frac{1}{2}$、$L_2=\frac{1}{2}$和 $L_3=0$.由式(6.4),N_4 可以表示为两项的积:

$$N_4=\left[\frac{L_1-0}{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{L_2-0}{\frac{1}{2}}\right]=4L_1L_2$$

这里每一项的分子都是一条直线的方程,而分母是分子表达式在节点 4 的值.

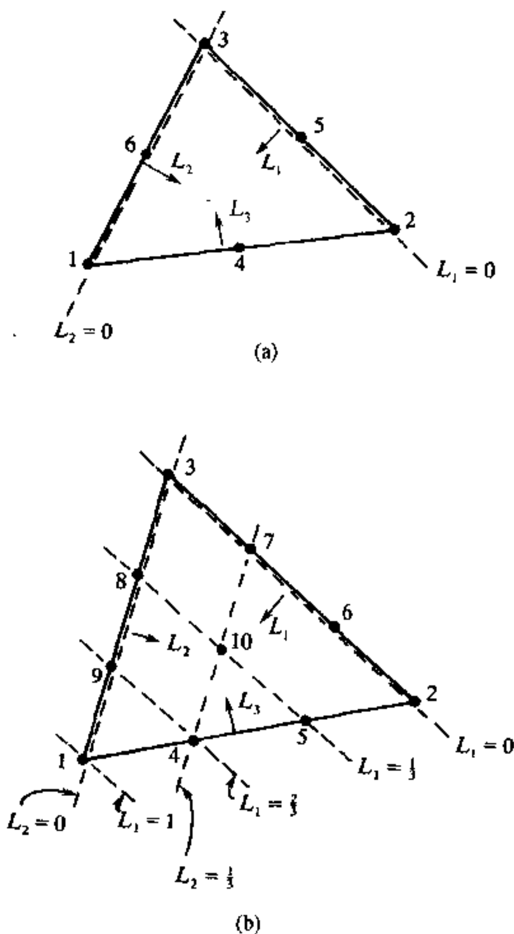


图 6-9

三次元的阶是 3.如图 6-9(b)所示,直线 $L_1=0$, $L_1=\frac{1}{3}$和 $L_2=0$ 的并集包括了除节点 4 以外的所有其他节点.节点 4 的面积坐标为 $L_1=\frac{2}{3}$、$L_2=\frac{1}{3}$和 $L_3=0$.将上述条件代入式(6.4),得

$$N_4=\left[\frac{L_1-0}{\frac{2}{3}}\right]\left[\frac{L_2-0}{\frac{1}{3}}\right]\left[\frac{L_1-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}\right]=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1)$$

6.21 三节点三角形单元的面积坐标和积分格式已经在第三章的题 3.16 和 3.17 进行了介绍.对于高阶三角形单元,采用等参数格式有利于问题的解决.而对于四边形单元,(x, y)坐标系中的变形单元可以投影到母单元中去,从而可以采用一般的积分程序计算刚度积分.试讨论等参数三角形单元关于面积坐标的坐标变换关系.

解 ☞ Zienkiewicz 和 Taylor(1989)使用的方法有助于避免在推导过程中发生混淆. 由于二维单元有三个面积坐标,而二维空间只有两个原始变量 x 和 y,因而母单元应该是二维空间(四边形为 ξ 和 η). 由题 3.16,只有两个线性无关的面积坐标,这是因为 $L_1+L_2+L_3=1$. 定义

$$\xi = L_1 \qquad \eta = L_2 \qquad 则\ L_3 = 1-\xi-\eta \tag{a}$$

从而题 6.6 中的式(c)至式(f)及式(h)是有效的. 形函数是 L_1,L_2 及 L_3 的函数,即

$$N_i = N_i(L_1, L_2, L_3) \tag{b}$$

设由式(a)定义的 ξ 不依赖于式(b)中的 L_1,式(b)的偏导数为

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} \tag{c}$$

由式(a),式(c)的右端项分别计算为

$$\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = 1 \qquad \frac{\partial L_2}{\partial \xi} = 0 \qquad \frac{\partial L_3}{\partial \xi} = -1$$

式(c)可以写为

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \tag{d}$$

类似的,有

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \tag{e}$$

Jacobi 矩阵可以写成题 6.6 中式(g)的形式

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{f}$$

式(f)是由定义式(d)和(e)计算得到的.

6.22 如图 6-10(a)所示的三角形单元. 对于题 3.18 和 3.19 中的对流项,试利用等参数格式计算其在刚度矩阵中的相应项;如图 6-10(b)所示的三角形单元的积分结果,举例说明线性积分格式和二次积分格式的用法.

解 ☞ 被积函数是题 3.18 中的式(b). 设单位值为 t,为便于引用,该函数为

$$\int_A \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ N_3 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & 0 \\ 0 & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y \end{bmatrix} \mathrm{d}A \tag{a}$$

回想第三章或题 6.42,线性形状函数和面积坐标间满足等式:

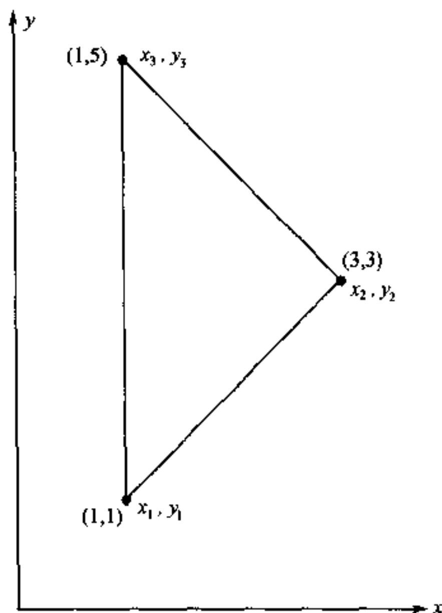
$$x = [\mathbf{N}]\{\mathbf{x}\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]\{x_1 \quad x_2 \quad x_3\}^{\mathrm{T}} = L_1 + 3L_2 + L_3$$

$$y = L_1 + 3L_2 + 5L_3$$

式(a)需要求偏导数,因而需计算由题 6.21 中的式(f)给出的 Jacobi 矩阵的逆矩阵. 参考题 6.21 中的式(d)和式(e),有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1}{\partial L_1} - \frac{\partial N_1}{\partial L_3} = 1-0 \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_2}{\partial L_1} - \frac{\partial N_2}{\partial L_3} = 0-0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_2}{\partial L_1} - \frac{\partial N_3}{\partial L_3} = 0-1 \\
\frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_1}{\partial L_2} - \frac{\partial N_1}{\partial L_3} = 0-0 \\
\frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_2}{\partial L_2} - \frac{\partial N_2}{\partial L_3} = 1-0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_3}{\partial L_2} - \frac{\partial N_3}{\partial L_3} = 0-1
\end{aligned} \tag{b}$$

$$J_{11} = (1)(1) + (0)(3) + (-1)(1) = 0 \quad J_{12} = (1)(1) + (0)(3) + (-1)(5) = -4$$



(a)

次数	节点	面积坐标 L_1	L_2	L_3	权重 w_i
一次	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
二次	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
	b	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	c	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
三次	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	b	0.6	0.2	0.2	$\frac{25}{48}$
	c	0.2	0.6	0.2	$\frac{25}{48}$
	d	0.2	0.2	0.6	$\frac{25}{48}$

(b)

图 6-10

$$J_{21} = (0)(1) + (1)(3) + (-1)(1) = 2 \quad J_{22} = (0)(1) + (1)(3) + (-1)(5) = -2$$

和

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad |\det J| = 8 = 2A \tag{c}$$

这就得到了坐标变换的 Jacobi 矩阵，下面需要计算式(a)右边的矩阵．类似于题 6.6 中式(g)的计算，由上面的式(b)和式(c)，有

$$\begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y \end{bmatrix} = J^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{d}$$

联合式(d)和式(a),得到数值积分被积项的最终形式:

$$\begin{bmatrix} (-L_1/4)(u_x+u_y) & L_1u_x/2 & (L_1/4)(3u_x+u_y) \\ (-L_2/4)(u_x+u_y) & L_2u_x/2 & (L_2/4)(3u_x+u_y) \\ (-L_3/4)(u_x+u_y) & L_3u_x/2 & (L_3/4)(3u_x+u_y) \end{bmatrix} \tag{e}$$

利用图 6-10(b)中关于面积坐标的表达式,完成了刚度矩阵的数值积分.将积分限写成面积坐标的形式,加权积分近似为

$$\int_0^1\int_0^{1-L_2} F\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}w_iF_i(L_{1i}L_{2i}L_{3i}) \tag{f}$$

这里 w_i 为权,L_{1i}、L_{2i}和 L_{3i}为样本点.记住函数式(a)是定义在(x,y)坐标系中的函数,$dA=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并且在新坐标系中 $dA=|\det \mathrm{J}|\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2$.考虑式(e)的第一项以及线性积分格式,将$\frac{1}{3}$代入每一个 L_i,并由 $w_i=1$,有:只有 L_1 出现在第一项中,即

$$K_{11}=-\frac{1}{2}(1)\frac{\frac{1}{3}}{4}(u_x+u_y)(8)=-\frac{u_x+u_y}{3}$$

类似的,有

$$K_{22}=\frac{1}{2}(1)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u_x(8)=\frac{2u_x}{3}$$

采用同样的方法,可以计算其他项,这部分请读者自己证明.利用题 3.39 给出的真解,可以检查线性积分的正确性,其真解为

$$K_{11}=\frac{u_xb_1+u_yc_1}{6}\qquad b_1=y_2=y_3=-2\qquad c_1=x_3-x_2=-2$$

$$K_{11}=-\frac{u_x+u_y}{3}$$

线性积分给出了该项的真解.类似的

$$K_{22}=\frac{u_xb_2+u_yc_2}{6}\qquad b_2=y_3-y_1=4\qquad c_2=x_1-x_3=0$$

$$K_{22}=\frac{2u_x}{3}$$

该项也得到了真解.

如果对 K_{11}采用二次积分格式.由图 6-10(b),取 L_i 分别为$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$和 0,以及 $w_i=\frac{1}{3}$,有

$$K_{11}=\frac{1}{2}\left\{-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(u_x+u_y)\cdot\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(u_x+u_y)\cdot\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{1}{4}(0)(u_x+u_y)\cdot\frac{1}{3}\right]\right\}$$

$$K_{11}=-\frac{u_x+u_y}{3} \tag{g}$$

这里同样得到了真解.其余项可类似地进行计算,这里不再赘述.可见对于线性三角形单元而言,采用线性积分格式足可以得到真解.然而,通过题 6.43 的学习,读者们将发现:对于被积项为形函数(没有形函数的导数)的情况,线性积分格式无法给出其精确解.

补 充 习 题

6.23　对如图 6-11 所示的六节点单元,利用 Lagrange 插值多项式推导其形状函数.

6.24　对如图 6-12 所示的九节点单元,利用关于(ξ,η)坐标的 Lagrange 插值多项式以及图中所示的节点编号顺序,推导其形状函数.

6.25　对如图 6-7 所示的八节点等参数单元,利用关于(ξ,η)坐标的 Lagrange 插值多项式以及图中所示的节点编号顺序,推导其形状函数.

6.26　设矩形单元的边平行于笛卡儿坐标系的 x 轴和 y 轴,试推导相应的 Jacobi 矩阵并计算其行列式的值.

6.27　对题 6.26 中定义的矩形单元,计算题 6.7 中式(h)的值.

6.28　利用四节点等参数格式,推导平面弹性题 3.13 的刚度矩阵.设 $\nu=0.3$,分别求出代入位移边界条件之前、之后的结果.

6.29　在弹性理论中,轴对称压力荷载下厚壁圆筒上的应力分析是一个重要的问题.由于荷载是轴对称的,

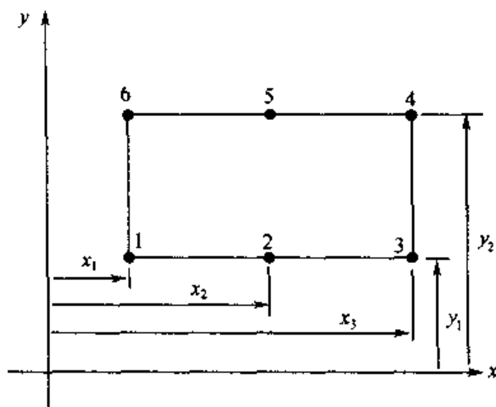


图 6-11

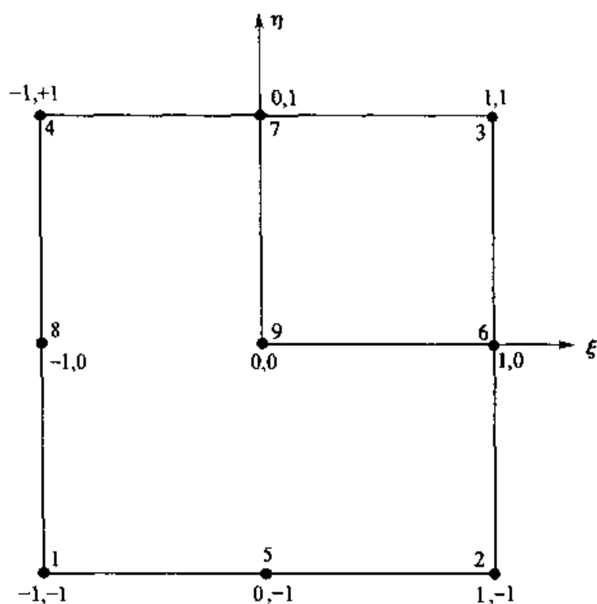


图 6-12

可以在一维空间中进行求解.如果圆筒的两端是受约束的,可以假设平面应力 $\varepsilon_{zz}=0$.(a)推导其平衡方程;(b)在平面应变假设下,推导其应力-应变方程;(c)将(b)部分的结果代入到(a)部分的方程中,并利用式(6.5),推导关于径向位移 u 的控制方程.

6.30　(a)求题 6.29 中由(c)部分导出的微分方程的一般解;(b)一般问题的边界条件是不确定的,而压力形式的应力边界条件 $\sigma_{rr}(a)=-p_a$ 和 $\sigma_{rr}(b)=-p_b$ 可以用来计算积分常数.求位移的解;(c)分别取 $r=a$ 和 $r=b$ 为圆筒的内部半径和外部半径,求应力的解.

6.31　考虑厚壁圆筒题 6.14.对于十单元的模型,求各单元中心点处的应力,并与真解进行比较.

6.32　采用如图 6-13 所示的两个八节点四边形单元,求解厚壁圆筒题 6.13 和 6.14.

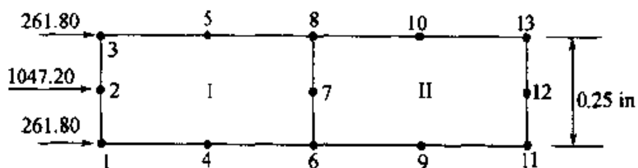


图 6-13

6.33　对题6.16和图6-7中的八节点单元，假设均匀变化的荷载作用在边1-8-4上，荷载从节点1处的0变化为节点4处的 p_x，试求每一个节点处的荷载分布.

6.34　对题6.24和图6-12中的九节点单元，假设荷载均匀作用在边上，试求每一个节点处力的分布.

6.35　设等参数单元上沿 $\eta=\pm1$ 受到表面荷载的作用，试求 dS 的表达式.

6.36　如图6-5所示的单元，将边的中点取为节点，沿 x 方向的均匀压力荷载 p_x 作用在边1-8-4上. 试利用题6.25定义的等参数格式、节点序号和形状函数，求节点1、8和4处的应力.

6.37　采用Galerkin方法求轴对称热传导问题的有限元方程.

6.38　如图6-14所示的轴对称等参数单元，设电荷载分布密度为 $\rho_0=1$，分别计算四节点单元和八节点单元的节点处的电荷.

6.39　轴对称空间的定义域 $r_{in}=1.0$，$r_{out}=2.0$. 参考式(6.8)并忽略对于 θ 和 z 的依赖性，一维静电题(2.22)可以写成极坐标形式. (a)假设电荷密度为常数 ρ_0，边界条件为 $\phi(r_{in})=\phi(r_{out})=0$，求该问题的解析解. (b)将轴对称区域剖分为六个等距四节点轴对称有限单元，比较单元节点处势函数 ϕ 的有限元解和真解. 设 $\varepsilon=1.0$，$\rho_0=1.0$.

6.40　采用八节点等参数单元求解题6.39，并将其与四节点轴对称有限单元上的解相比较. (a)假设采用一个有限单元的模型. (b)采用三个等距单元.

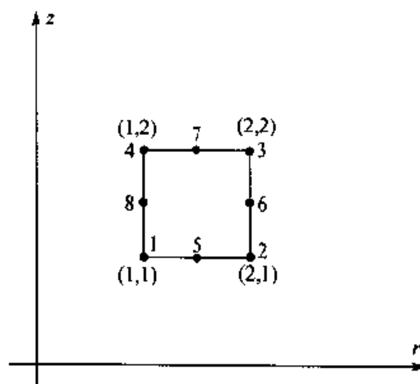


图6-14　轴对称单元

6.41　采用两个八节点轴对称等参数有限单元求解题2.19，其中每种材料为一个单元. 重复以上分析，将每种材料所占空间分别剖分为两个等距八节点轴对称有限单元，即一共有四个单元，重新求解上述问题.

6.42　如图6-8所示的三角形有限单元，试求相应的线性、二次和三次形函数.

其节点的编号顺序是任意的，但是通常顶点的编号为1，2和3，而边线上的内点则从节点1和2之间的点开始进行编号.

6.43　对于线性三角形有限单元，题3.17推导了式(3.2)中化学反应项的刚度矩阵. 试对线性三角形等参数有限单元，求解上述问题，并比较线性数值积分公式和二次数值积分公式的异同.

补充习题答案

6.23　由式(6.3)，联合二节点和三节点插值公式，有 $N_1=L_{1x}L_{1y}$ 和 $N_3=L_{3x}L_{3y}$ 等.

$$N_1=\left(\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right)\left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\right)$$

$$N_2=\left(\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\right)\left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\right)$$

$$N_3=\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right)\left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\right)$$

$$N_4=\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right)\left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)$$

$$N_5=\left(\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\right)\left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)$$

$$N_6=\left(\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right)\left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)$$

6.24　形状函数的构造方法类似于题6.23中的六节点单元. 联合应用图6-12中的坐标，可得到三点Lagrange插值公式.

$$N_1=\xi\eta(\xi-1)(\eta-1)/4\quad N_2=\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)/4\quad N_3=\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)/4$$

$$N_4=\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)/4\qquad N_5=-\eta(\xi+1)(\xi-1)(\eta-1)/2$$

$$N_6=-\xi(\xi+1)(\eta+1)(\eta-1)/2\qquad N_7=-\eta(\xi+1)(\xi-1)(\eta+1)/2$$

$$N_8=-\xi(\xi-1)(\eta+1)(\eta-1)/2\qquad N_9=(\xi+1)(\xi-1)(\eta+1)(\eta-1)$$

6.25

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4 \qquad N_2 = (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4 \qquad N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4$$

$$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \qquad N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$$

$$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \qquad N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$$

6.26 代入题 6.7 中的式(a),有

$$J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & y_4 - y_1 \end{bmatrix} \qquad |\det J| = \frac{ab}{4}$$

6.27

$$\int_{A_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} |\det J|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = ab$$

6.28 代入边界条件之前的刚度矩阵是对称矩阵

$$\begin{bmatrix}
4334555 & 1785714 & -1129426 & -137362 & -2167277 & -1785714 & -1037851 & 137362 \\
 & 6874238 & 137362 & 2283273 & -1785714 & -3437119 & -137362 & -5720391 \\
 & & 4334554 & -1785714 & -1037851 & -137362 & -2167277 & 1785714 \\
 & & & 6874237 & -137362 & -5720391 & 1785714 & -3437119 \\
 & & & & 4334554 & 1785714 & -1129426 & -137362 \\
 & \text{对称} & & & & 6874237 & 137362 & 2283273 \\
 & & & & & & 4334554 & -1785714 \\
 & & & & & & & 6874238
\end{bmatrix}$$

代入边界条件之后的刚度矩阵见题 3.13.

6.29 (a)由问题 $\sigma_{rz}=0$ 的轴对称性和平面应变假设$\partial/\partial z=0$,控制方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

(b)由式(3.18)和 $\epsilon_{zz}=0$,应力-应变方程为

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_{rr} + \nu\epsilon_{\theta\theta}]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{rr}]$$

求解方程组(3.18)的第三个方程,有 $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$.

(c)将应变代入上式,并将应力代入(a)中的控制方程,得到的结果为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

6.30 (a)$u=C_1r+C_2/r$.

(b)代入题 6.29 式(b):

$$\sigma_{rr}(a) = -p_a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C_1 - (1-2\nu)\frac{C_2}{a^2}\right]$$

$$\sigma_{rr}(b) = -p_b = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C_1 - (1-2\nu)\frac{C_2}{b^2}\right]$$

求解这些方程,得

$$C_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{p_aa^2-p_bb^2}{b^2-a^2} \qquad C_2 = \frac{1+\nu}{E}\frac{(a-b)a^2b^2}{b^2-a^2}$$

(c)代入应力-位移方程:

$$\sigma_{rr} = C_3 - \frac{C_4}{r^2} \qquad \sigma_{\theta\theta} = C_3 + \frac{C_4}{r^2}$$

$$C_3 = \frac{p_aa^2-p_bb^2}{b^2-a^2} \quad \text{和} \quad C_4 = \frac{(p_a-p_b)a^2b^2}{b^2-a^2}$$

6.31 结果由表 6.5 给出.计算结果与题 6.14 的解的比较及讨论参见题 6.15.

表 6.5 厚壁圆筒问题十个单元模型的应力分布(单位:lb/in²)

单元	r (in)	有限元解 σ_{rr}	有限元解 $\sigma_{\theta\theta}$	有限元解 σ_{zz}	真解 σ_{rr}	真解 $\sigma_{\theta\theta}$
1	1.05	−875.52	1543.75	200.47	−876.04	1542.71
2	1.15	−674.39	1341.93	200.26	−674.86	1341.52
3	1.25	−519.58	1186.69	200.13	−520.00	1186.67
4	1.35	−397.91	1064.72	200.04	−398.26	1064.93
5	1.45	−300.55	963.14	199.98	−300.83	967.50
6	1.55	−221.42	887.87	199.93	−221.64	888.31
7	1.65	−156.24	822.58	199.90	−156.41	823.08
8	1.75	−101.91	768.18	199.18	−102.04	768.71
9	1.85	−56.16	722.37	199.86	−56.25	722.91
10	1.95	−17.26	683.43	199.85	−17.31	683.98

当与题 6.14 的结果进行比较后,可见应力结果出奇的精确.当比较整个格式的精度时,单元中点的径向应力有些振荡,影响了解的精度.

6.32 节点编号如图 6-13 所示 z 方向的单元长度是 0.25,圆筒内表面受到的总压力荷载是$(1000)(2\pi)\cdot(0.25)(r=1.0)=1570.80$.由题 6.16 的结论,总荷载分配到节点 1,2 和 3 上:节点 1 和 3 上为 $1570.80/6=261.80$,节点上为 $1570.80\left(\frac{2}{3}\right)=1047.20$.结果见表 6.6 和表 6.7.

表 6.6 厚壁圆筒问题二个八节点单元模型的径向位移(in)

r(in)	节点	有限元解	真解
1.00	1,2,3	1905.09	1906.67
1.25	4,5	1602.57	1603.33
1.50	6,7,8	1414.60	1415.55
1.75	9,10	1293.03	1293.81
2.00	11,12,13	1212.55	1213.33

表 6.7 厚壁圆筒问题二个八节点单元模型的应力分布(单位:lb/in²)

单元	r (in)	有限元解 σ_{rr}	有限元解 $\sigma_{\theta\theta}$	有限元解 σ_{zz}	真解 σ_{rr}	真解 $\sigma_{\theta\theta}$
1	1.0564	−800.58	1557.38	227.04	−861.43	1528.10
1	1.2500	−580.92	1159.87	173.69	−520.00	1186.67
1	1.4436	−264.54	988.05	217.05	−306.47	973.13
2	1.5564	−202.40	890.19	206.34	−217.09	883.76
2	1.7500	−117.70	761.51	193.14	−102.04	768.71
2	1.9437	−8.43	690.17	204.52	−19.59	686.27

6.33 节点 1:0;节点 8:整体荷载的三分之二;节点 4:整体荷载的三分之一.

6.34 结果等同于题 6.16 的八节点单元的结果.

6.35

$$dL=\left[\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i d\xi\right)^2+\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i d\xi\right)^2\right]^{1/2}\quad (i\text{ 从 1 到节点的总数})$$

6.36 参见题 6.16,节点 1 和节点 4 之间的单元长度为 3.16228,整体均匀荷载为 $3.16228p_x$,等参数单元上的计算结果为:节点 1 和节点 4 处的值为 $0.52704p_x$,节点 8 处的值为 $2.10819p_x$.其分布与题 6.16 的相同,即角点处为总荷载的六分之一,中间点处为总荷载的三分之二.该问题表明等参数格式与边界面的形状有关.

6.37 见题 7.4.

6.38

八节点单元		四节点单元	
节点	ϕ	节点	ϕ
1	−0.87266	1	2.0944
2	−0.69813	2	2.6180
3	−0.69813	3	2.6180
4	−0.87266	4	2.0944
5	3.14159		
6	3.49066		
7	3.14159		
8	2.79253		

两种计算结果单元上的电荷总量都是9.4248，计算式为 $2\pi r_{avg}\rho_0 = 9.4248$，这里 $r_{avg} = 1.5$.

6.39

$$\phi(r) = \frac{\rho}{4\varepsilon}(r_{in}^2 - r^2) - \frac{\rho}{4\varepsilon}(r_{in}^2 - r_{out}^2)\frac{\ln(r_{in}^2/r)}{\ln(r_{in}^2/r_{out}^2)}$$

6.40　三个八节点单元的解由表6.8给出. 其精度有少量的提高. 一单元解的节点在 $r = 1.5$ 处，ϕ 的计算值为0.125；相当接近于真解.

表 6.8　轴对称静电问题(伏)

节点位置 r	ϕ，四节点有限元解	ϕ，真解	ϕ，八节点有限元解
1.0	0.0	0.0	0.0
1.1667		0.07640	0.07648
1.3333		0.11668	0.11683
1.5	0.12622	0.12608	0.12620
1.6667	0.10829	0.10817	0.10828
1.8333		0.06552	0.06557
2.0	0.0	0.0	0.0

6.41　结果由表6.9给出. 与表2.19进行比较.

表 6.9　同轴悬索问题分析(伏)

r	ϕ，二单元解	ϕ，四单元解
5.00	500.0	500.0
6.25		1136.53
7.50	1364.61	1373.23
8.75		1283.52
10.00	910.76	914.10
13.75		596.59
17.50	357.80	355.92
21.25		162.26
25.00	0	0

6.42　一次：

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

二次：

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \qquad N_2 = L_2(2L_2 - 1) \qquad N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \qquad N_5 = 4L_2L_3 \qquad N_6 = 4L_1L_3$$

三次：

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \qquad N_2 = \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2) \qquad N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1) \qquad N_6 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$$

$$N_7=\frac{9}{2}L_2L_3(3L_3-1) \qquad N_8=\frac{9}{2}L_1L_3(3L_3-1)$$

$$N_9=\frac{9}{2}L_1L_3(3L_1-1) \qquad N_{10}=27L_1L_2L_3$$

6.43　刚度矩阵的形式为[题 3.17 式(b)]：

$$[\mathrm{K}]=\int_A[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{K}_r][\mathrm{N}]t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由于这里没有导数项，所以不需要求 Jacobi 矩阵的逆矩阵；可以看到，采用坐标 x_1,y_1,x_2,y_2 和 x_3,y_3，有 $|\det \mathrm{J}|=2A$. 构造类似于题 3.17 式(b)的解，从而被积函数为

$$\begin{bmatrix}L_1 & L_1\\ L_2 & L_2\\ L_3 & L_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_r/2 & 0\\ 0 & K_r/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1 & L_2 & L_3\\ L_1 & L_2 & L_3\end{bmatrix}|\det \mathrm{J}|=2A(K_{rx})\begin{bmatrix}L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3\\ L_2L_1 & L_2^2 & L_2L_3\\ L_3L_1 & L_3L_2 & L_3^2\end{bmatrix}$$

由线性积分公式，有

$$K_{rx}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\frac{A}{9}$$

与题 3.17 式(e)相比并不精确．但是，利用二次积分公式可以得到真解．

第七章　有限元分析中的精选题目

7.1　引言

在前面的章节中已经介绍了基本原理和一些应用问题.每一章的意图是略述并讨论一个特殊的主题,同时也说明有限元理论仅仅是多年来分析家可用的数值方法的一个扩展.计算机使得求解大型方程系统和处理大量数据成为可能.因此,现已存在的数值方法对科学家和工程人员来说变得很有用了.在本书中已经表明有限元分析仅仅是数值分析中 Rayleigh-Ritz 方法和/或者 Galerkin 方法的一个现代应用.

每年都有新的应用和概念出现在科学论著之中,并且使用者或者研究人员在试图与新发展并驾齐驱时,都会遇到一个真正的挑战.大多数的分析学者都在他们感兴趣的科学的应用领域的范围内工作.当然,人们将继续进行研究工作以使得对有限元方法的基本数学概念有一个更全面的了解.

本章对读者有实际兴趣的一些问题作一个介绍.初值问题的解在许多研究领域中都有影响,其中有一些问题在几十年前还不能解.多年来分析方法已经可以对时间导数进行逼近,但是在模拟边界条件中的困难已经成为分析中的主要限制.模拟与时间相关耦合分析的有限元方法,在分析时间相关问题中已经产生了一个作用.对一阶时间导数的有限差分逼近将在本章中介绍,并说明各种应用.

在本章中对经典的特征值问题进行讨论,并说明它的几种应用.在这里分析的微分方程对应在工程中出现的各种应用问题.关于计算大型方程系统的分析方法将不被讨论,但是可在许多的教材中找到它们.

在本章中包含将有限元概念扩展到三维以及对高阶单元思想进行介绍的几个部分.可以在有限元理论的更广泛的分析中找到这些问题,对于那些已经掌握本书的读者在研究更详细的论著时应不会有困难.最后,本章以一个镀金属板有限元的介绍作为结束.金属板有限元在有限元方法开始的时候就是一个分析的问题,并且继续是目前出版的论著中的一个主要部分的题目.这里展示的单元是典型的金属板有限单元,并同时可应用于薄板原理和适度的厚板原理.

7.2　初值问题

在第五章中简要地提到了初值问题,在那里使用 Galerkin 方法构造了微分方程对应的有限元公式.在本章中将讨论一个时间相关的微分方程的数值分析方法.可以用一个有限单元逼近时间导数.但是,由于在时间上的有限元逼近并不能提供特别的优点,因此在这里我们使用标准的有限差分逼近.回想一下第六章中,通过使用可模拟复杂边界条件的等参公式说明了有限元的计算能力.初值问题通常开始于时间等于零的条件,且它不能证明有限元公式化的正确.

读者可以找到大量的有关初值问题数值解的书籍.本章的重点将放在经典瞬时问题,也就是具有如下形式的方程

$$\alpha(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right]+\gamma(x)\phi(x,t)=\delta(x,t) \tag{7.1}$$

其中 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, 和 $\delta(x,t)$是关于一个特殊应用的函数.但是他们可能是 x 的函数,这个事实并没有比前面章节产生过多的障碍.它们将被假设在单元内部保持不变而只在单元之间变化.另外,由于时间是以增量的形式获得,所以物质常数可以是时间的函数并且允许以增量的方式变化.

包含二阶时间导数的微分方程经常被称作动力方程或波传播方程.此类问题将不做详细讨论,而只在下一部分中证明在作为一个特征值问题,某种假设下此问题是可以被公式化的.对此类重要问题的解将被证明推导.

瞬时问题的有限差分模型可以用任何一种逼近一阶导数的方式构造.经典意义上,它们被称作向前差分,向后差分和中间差分逼近.θ 方法(theta 方法)是十分通用的,并且作为特例包含有上面的三种方法.本章中 θ 方法将被推导和使用(见题 7.3)

Galerkin 方法将被用来推导各种选题的有限元模型.特别地,瞬时热传导将在题 7.2,7.19 和 7.20 中说明.一个相似的问题,通过中空柱体壁的轴对称瞬时扩散,将在题 7.4,7.22 和 7.23中说明.一个包含耦合两相扩散的问题由题 5.25,7.5 和 7.21 给出.在每种情况中,有限元公式,分析解和有限元解都将被讨论和比较.

7.3　特征值问题

特征值问题有时也被称作特性-值问题并出现在齐次微分方程之中.在数学物理和工程中特征值问题的一个重要类型是连续系统的振动.对柱体,弹性金属板和框架的临界弯曲负载组成了重要的特征值问题的另一种类型.一个特征值问题的有限元公式化遵循已经导出的概念;事实上,并不需要新的概念.在形成公式之后,求特征值问题的解将会遇到新的挑战.虽然关于大型方程系统的分析方法将不被讨论,但是可以找到很多处理此重要问题的教材.

参照题 2.1 中式(e)的钢索可以说明一个连续系统.忽略基础模数 k 和外部负载 f,通过对 y 方向上力求和,式(a),并包括惯性力,可获得动力问题.回顾牛顿定律,$\sum F_y = \rho a_y$,其中 ρ 是质量或密度,根据公式来决定,a_y 是 y 方向上的加速度.最终的方程有如下形式

$$T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{7.2}$$

式(7.2)是一个双曲型微分方程并控制着钢索的动力运动.作为 x 和 t 的函数并沿着钢索运动的问题经常被称作波的传播问题,并需要一个用 x 和 t 表示的解.假设钢索的自由横向运动在本质上是振动性的和周期性的,并能用一周期函数描述,此时就出现了特征值问题.当使用可导致一个周期解的变量分离技术时,此假设可以得到强有力的数学支持.在例题部分中将说明几个例子.

7.4　三维有限元

三维有限元是第六章的二维等参单元的一个扩展.在题 5.19 中讨论的压电性原理需要三维模型,并介绍了一个八结点三维单元的思想.形状函数 Lagrange 族包括了二维单元扩展到三维单元,其推导类似于题 6.4.当使用 Gauss-Legendre 积分法计算体单元时,数值积分直接遵循第六章的面积分方法.读者应复习一下在第六章所述的数值积分过程,在那里积分可数值计算为

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{7.3}$$

式(7.3)所对应的三维公式为

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \psi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\psi \tag{7.4}$$

其中 ξ, η, ψ 是三维母单元的坐标.体积分的计算需要一个在使用插值公式的母单元和一个三维 Jacobi 矩阵之间的变换以获得式(7.4)的形式.使用三个嵌套求和来进行数值积分.则式(7.4)的等价形式为

$$I \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \psi_k) \tag{7.5}$$

其中,通常情况下,$m = n = l$.

砖形单元的形状函数的推导将在题 7.14 中讨论，并在补充习题中展示另外一些单元.

等参三角单元的三维对应单元被称作四面体单元.四面体单元有四个面，并可分类为线性的(4 结点)，二次的(10 结点)和三次的(20 结点).一组特殊的积分法被用来数值计算体积分，而此体积分是第六章所使用的对应二维三角等参单元积分的一个扩展.读者能够参考到关于有限元分析中有关三维等参单元上的积分公式和其他信息的高级书籍，像 Zienkiewicz 和 Taylor(1989)，或者 Stasa(1985).

7.5 高阶有限元

在第六章讨论并使用了线性和二次等参有限元.为模拟任一二维问题，八结点和九结点的等参单元通常就足够了.使用上一部分中的线性和二次单元能够对三维问题进行很好的模拟.单元的 Lagrange 族可以扩展到能包括三次单元，但是这样的话是有缺点的，因为此时需要的内部结点比期望的要多.例如，尽管 Lagrange 三次单元的导数很简单，单元也将有 12 个外部结点和 4 个内部结点.无内部结点的三次单元(见题 7.15 和 7.33)应是一个更有效的选择.使用 Gauss 积分法的阶应依赖于有限单元的阶.根据 Zienkiewicz 和 Taylor(1989)，对线性的四边形和三角形来说，一个积分点就足够了.抛物型的四边形，2×2 的 Gauss 积分点是足够的，对于抛物型的砖形，$2\times2\times2$ 的 Gauss 积分点是足够的.作者对抛物型有限单元使用过 2×2 和 3×3 的 Gauss 积分点，总是得到相同的结果.

7.6 单元连续性

有限元分析中连续性定义为解沿着单元边界的连续性.有限元分析的最本质的性质隐含着问题的一个分段解.在前面的章节中已经完成了有限元方法对各种物理问题的应用，但是却没有研究甚至没有提到可能存在单元内部连续性的问题.已经研究过的大多数单元是线性的.想象一下被分成两个单元的一维空间.连续两个单元的结点对这两个单元来说起到一个连接边界点的作用.显然，被模拟的函数在连接结点处是单值的.当考虑函数的导数时就会出现连续性问题，比如，被用来模拟物理问题的形状函数的导数的连续性.

数学函数被经常赋予一个类，并被称作在某区域内属于 C^n 类.属于 C^0 的函数是连续的.如果函数的一阶导数是连续的，它就归属于 C^1，并且函数的二阶导数也连续，那它属于 C^2 类.由此得到，如果函数和它的 n 阶导数在某区域内是连续的，那么它属于 C^n 类.

7.7 金属板有限元

对于平板弯曲时所出现问题的分析是有限元方法早期应用之一.但是存在一些基本的障碍，使得有限元法对平板弯曲问题的应用，比对于前面章节中问题的应用更为困难.平板弯曲的控制方程是一个四阶微分方程，正因如此，就有一个更为严厉的连续性要求.本章中将讨论一个不需要满足所有连续性要求就能给出好的结果的单元.Hughs 和 Cohen(1978)以及 Hughs(1987)讨论了这种单元.这里的讨论依赖于 Cook 等(1989)所著的书籍.

下面将给出平板理论的一个简要推导.对于那些不熟悉此理论的读者应参考一个更明确的处理，例如，Timoshenko 和 Woinowsky-Krieger(1959).

力和应力矩的关系

在一个金属板内的内部应力产生如图 7-1 所示的弯曲力矩 M 和剪切力 Q.力矩和剪切力定义作用在平板的单位长度上.这些内部作用定义如下：

$$
M_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}z\,\mathrm{d}z \qquad M_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yy}z\,\mathrm{d}z \qquad M_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xy}z\,\mathrm{d}z
$$
$$
Q_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}\,\mathrm{d}z \qquad Q_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yz}\,\mathrm{d}z \tag{7.6}
$$

通过式(7.6)的积分可得支配力为

$$\sigma_{xx}=\frac{M_x z}{h^3/12}\qquad \sigma_{yy}=\frac{M_y z}{h^3/12}\qquad \sigma_{xy}=\frac{M_{xy}z}{h^3/12} \tag{7.7}$$

对式(7.6)得积分同样得到剩余剪切力为

$$\sigma_{yz}=\frac{3Q_y}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)\qquad \sigma_{zx}=\frac{3Q_x}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right) \tag{7.8}$$

但是它们是非常小的量,并且在金属板的中平面处,$z=0$,最大.

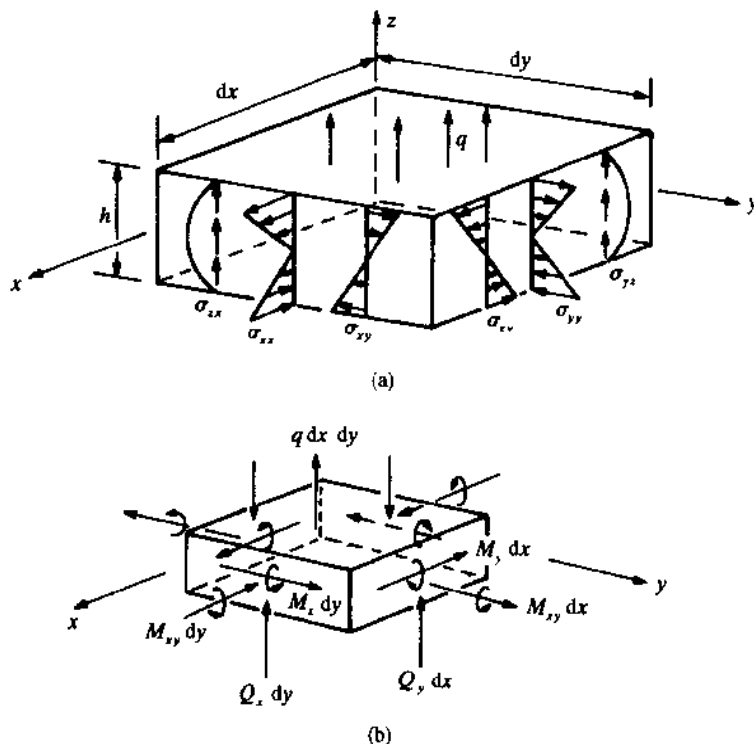


图 7-1

变形假设

经典意义上说,薄板理论有一些相似于梁的理论,并且常被称作平板的 Kirchhoff 理论.基本的假设为,在金属板的中平面,$z=0$ 上的点只在 z 方向上移动.在弯曲之前垂直于中平面的一条直线,在弯曲之后还垂直于中平面,并保持直线状态.在中平面上的点不能在 x 和 y 方向上移动.但是,分别为 x 和 y 方向上 z 到中平面的距离 u 和 v 能够发展为平板弯曲.这些位移在图 7-2 中说明,并由下式给出

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x}\qquad v=-z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{7.9}$$

对应的应变为

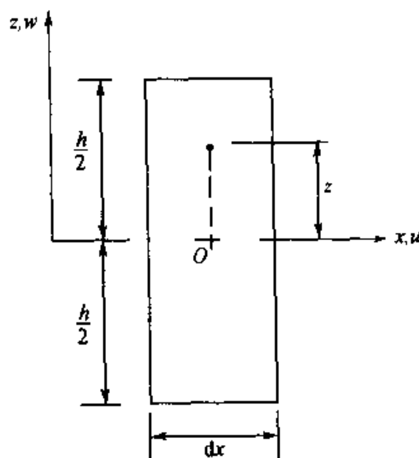
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{7.10}$$

由式(7.9)和(7.10)定义的应变变形关系并不允许横向剪切变形.

一个更完整的假设遵循同样的思想,除了一点,即在弯曲前垂直于中平面的直线虽仍保持直线状态但在弯曲后不垂直于中平面.在图 7-3 中显示了变形.z 轴和原先垂直于中平面的直线(x 轴)之间的角度定义为 θ_x.对 θ_y 有相似的定义.下面的变形假设被称作金属板的 Mindlin 的原理.

$$u=-z\theta_x\qquad v=-z\theta_y \tag{7.11}$$

应变变成



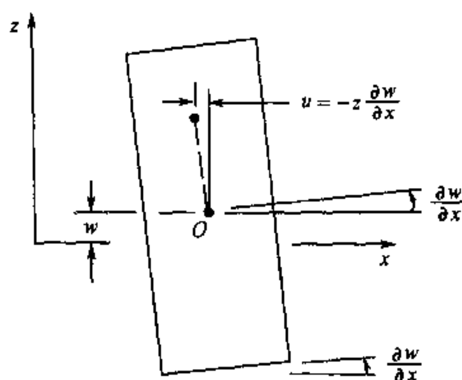


图 7-2　Kirchhoff 理论的微分元

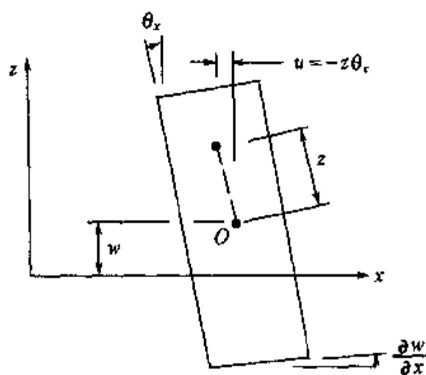


图 7-3　Mindlin 理论的变形，$\partial w/\partial x-\theta_x\neq 0$

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\quad \varepsilon_{yy}=-z\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\quad \varepsilon_{xy}=-z\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\qquad \varepsilon_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x \tag{7.12}$$

此原理说明了横向剪切变形并且使用于中等厚度的金属板.注意在 $\theta_x=\partial w/\partial x$ 和 $\theta_y=\partial w/\partial y$ 的假设下,厚金属板原理可导出薄金属板原理.

应力-应变和力矩-曲率关系

应力-应变关系对应一个线性的弹性材料,且遵循前一章的矩阵记号可以写为

$$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\} \tag{7.13}$$

假设均匀和各向同性物质特性,则应力[式(7.7)和(7.8)]与应变的关系为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 & 0 & 0\\ E\nu/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{Bmatrix} \tag{7.14}$$

其中 $G=E/2(1+\nu)$, E 是杨氏模数, ν 是泊松比率. 可通过将式(7.7)和(7.8)结合到式(7.12)并代入到式(7.14)中,就得到关于 Mindlin 原理的力矩-曲率关系.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\theta_x/\partial x \\ \partial\theta_y/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x \\ \theta_y - \partial w/\partial y \\ \theta_x - \partial w/\partial x \end{Bmatrix} \tag{7.15}$$

其中 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$是弯曲硬度.

在题 7.17 中,使用式(7.15)作为力矩或剪切力与曲率的一个基本关系,推导一个一般的金属板单元.对后面的参考式(7.15)的矩阵定义为

$$\{M\} = [D_M]\{\kappa\} \tag{7.16}$$

其中$[D_M]$是物质矩阵,$\{\kappa\}$是曲率矩阵.

例题详解

7.1　讨论关于一阶导数的向前插分,向后插分和中心插分有限元公式.

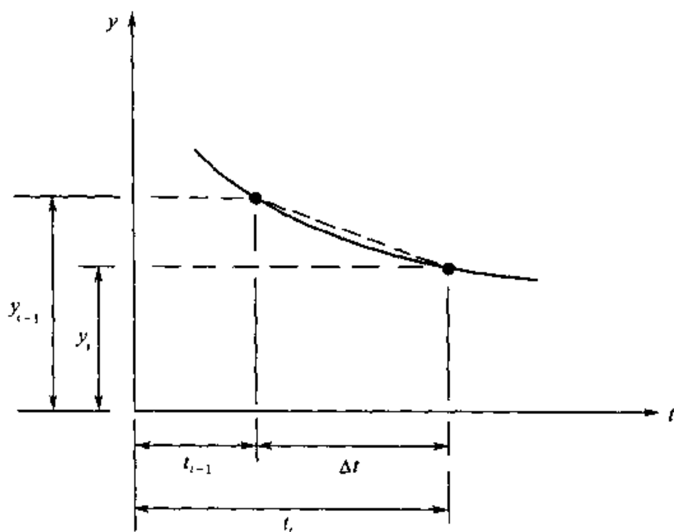


图 7-4　dy/dt 的有限插分表示

解　无论哪一种情况,近似都是线性的.对初等方程考虑有限插分分析

$$\frac{dy}{dt} + \gamma y = \delta \tag{a}$$

且 $y(0)=2$.式(a)的解为

$$y = \frac{\delta}{\gamma}(1 + e^{-\gamma t}) \tag{b}$$

在图 7-4 中描绘了一条代表分析解的曲线.假设已经计算出直到点 t_{i-1}处的数值解 y_{i-1}.要被计算的下一个 y 值是y_i.对式(a)的向前插分公式用 y 的前一个计算值表示为

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1} + \gamma y_{i-1} = \delta_{i-1} \tag{c}$$

其中,由图 7-4 知,对时间导数的向前插分公式为

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \qquad \Delta t = t_i - t_{i-1} \tag{d}$$

将式(d)代入到式(c),就得到关于 y_i 的向前插分递推公式:

$$y_i = y_{i-1} + (\delta_{i-1} - \gamma y_{i-1})\Delta t \tag{e}$$

根据将要被计算的 y 的下一个值就可以写出一个向后插分模型:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_i + \gamma y_i = \delta_i \tag{f}$$

且
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \qquad \Delta t = t_i - t_{i-1} \tag{g}$$

将式(g)代入到式(f)就得到关于 y_i 的向后插分递推公式：

$$y_i(1 + \gamma\Delta t) = y_{i-1} + \delta_i \Delta t \tag{h}$$

若假设 y 可在 t_i 和 t_{i+1} 的中点处计算，则可构造出中心插分模型：

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{i-1/2} + \gamma y_{i-1/2} = \delta_{i-1/2} \tag{i}$$

且
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{i-1/2} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \qquad \Delta t = t_i - t_{i-1} \tag{j}$$

其中 $y_{i-1/2}$ 假设为一个平均值：

$$y_{i-1/2} = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \tag{k}$$

当式(j)，(k)和(i)合并之后，中心插分公式变为

$$y_i\left(1 + \gamma\frac{\Delta t}{2}\right) = y_{i-1}\left(1 - \gamma\frac{\Delta t}{2}\right) + \delta_{i-1/2}\Delta t \tag{l}$$

在表 7.1 中给出了四个解，式(b)，(e)，(h)和(l)的一个比较.其中令 $\gamma = \delta = 1$ 和 $\Delta t = 0.1$.这三个数值解看起来都非常精确，并且中心插分解对于此次应用来说更为精确.但是，三个解中的任何一个都是可以接受的.一个更小的时间增量可以得到一个更精确的分析，但同时也需要花费更多的计算.而大的时间增量应需要更少的计算，并且中心和向后插分方法逼近于稳定状态下的解 $y = 1$，但对于瞬时行为就会较差的表达，在这些问题中它是有影响的.当时间步长变得太大了，向前插分方法将变得不稳定，且它的解也将从正确的解发散出去.对于能够给出解的一个很好的近似，同时又只需要一个最小的计算时间将是一个成功的分析.

表 7.1　有限插分解的比较

时间	精确，式(b)	向前插分，式(e)	向后插分，式(h)	中心插分，式(l)
0.0	2.0	2.0	2.0	2.0
0.1	1.90484	1.90000	1.90909	1.90476
0.2	1.81873	1.81000	1.82645	1.81859
0.3	1.74082	1.72900	1.75131	1.74063
0.4	1.67032	1.65610	1.68301	1.67010
0.5	1.60653	1.59049	1.62092	1.60628
0.6	1.54881	1.53144	1.56447	1.54854
0.7	1.49654	1.47830	1.51316	1.49630
0.8	1.44933	1.43047	1.46651	1.44903
0.9	1.40657	1.38742	1.42410	1.40627
1.0	1.36788	1.34868	1.38554	1.36757
1.5	1.22313	1.20589	1.23939	1.22285

7.2　使用 Galerkin 方法构造瞬时热传导的有限元模型的公式.

解　☞ 一维，二维和三维问题的有限元公式的形成是相似的.在此例中使用式(7.1)，并令其中的 $\alpha \Rightarrow \rho c$，密度乘以热量，$\beta \Rightarrow k$，热传导率，$\gamma = 0$，$\delta \Rightarrow -Q$，和 $\phi \Rightarrow T$.假设的解有下面的形式

$$T_R(x,t) = [\mathrm{N}(x)]\{T(t)\} \tag{a}$$

形状函数仅是坐标的函数，结点变量{T}仅是 t 的函数.遵循在第五章推导的方法并代入到控制微分方程得到

$$[\rho c][\mathrm{N}]\frac{\partial\{\mathrm{T}\}}{\partial t} - [\mathrm{k}]\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x^2}\{\mathrm{T}\} - Q = R(x;\{\mathrm{T}\}) \tag{b}$$

在 Galerkin 公式化中乘以[N]和 w_i，并在体积上积分，同时令结果为零：

$$\int_V\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\rho c][\mathrm{N}]\frac{\partial\{\mathrm{T}\}}{\partial t} - [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}]\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x^2}\{\mathrm{T}\} - [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}Q\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{c}$$

应用 Green-Gauss 原理可得最终结果：

$$\int_V\left([\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\rho c][\mathrm{N}]\frac{\partial\{\mathrm{T}\}}{\partial t} + \frac{\partial[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x}[\mathrm{k}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x}\{\mathrm{T}\} - [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}Q\right)\mathrm{d}V = \int_S[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x}\{\mathrm{T}\}\mathrm{d}S \tag{d}$$

式(d)还可以写成更紧凑得形式：

$$[C]\frac{\partial\{T\}}{\partial t}+[K]\{T\}=\{F\} \tag{e}$$

其中

$$[C]=\int_V [N]^T[\rho c][N]dV \tag{f}$$

矩阵[C]有时被称作容量矩阵.所有作用的行为都被放在一起并记为{F},[K]是标准的刚度矩阵.还可以得到对于二或三维的公式化式(e)的形式保持不变.只有[C]项是新的,并且在时间上的有限插分将被作用到未知量矩阵,而不像上一个问题那样是作用到一个单变量.

7.3 推导 θ 方法的一个一般的递推公式,并讨论它与题 7.1 中的插分方法的关系.

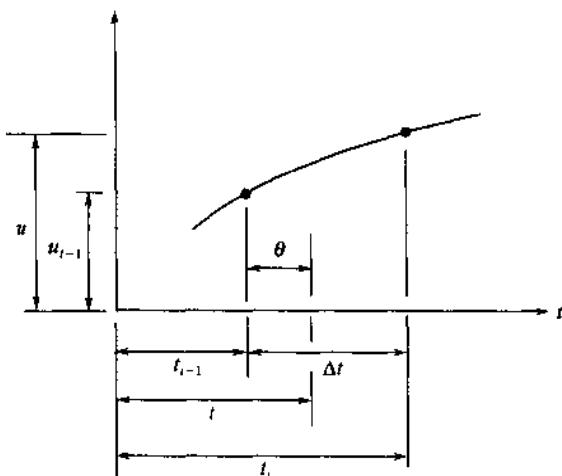


图 7-5 时间增量 θ 的定义

解 ☞ 假设一个类似于题 7.2 中式(e)的解,其中的变量写成下标 θ 的形式,如图 7-5 所示:

$$[C]\frac{d\{u\}_\theta}{dt}+[K]\{u\}_\theta=\{F\}_\theta \tag{a}$$

注意在不失一般性的情况下,可将偏导数变成全导数时间增量如前定义为 $\Delta t=t_i-t_{i-1}$,θ 定义为

$$\theta=\frac{t-t_{i-1}}{\Delta t}\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1 \tag{b}$$

因此 $\{u\}_\theta$ 可用 θ 定义为

$$\{u\}_\theta\approx(1-\theta)\{u\}_{i-1}+\theta\{u\}_i \tag{c}$$

或

$$\{u\}_\theta\approx\theta(\{u\}_i-\{u\}_{i-1})+\{u\}_i \tag{d}$$

另外,使用式(b)和(d)

$$\frac{d\{u\}_\theta}{dt}=\frac{d\{u\}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\{u\}_\theta}{d\theta}\frac{1}{\Delta t}=\frac{\{u\}_i-\{u\}_{i-1}}{\Delta t} \tag{e}$$

相似地,$\{F\}_\theta$ 定义为

$$\{F\}_\theta\approx(1-\theta)\{F\}_{i-1}+\{F\}_i \tag{f}$$

将式(c),(e)和(f)代入到式(a),并从新组合:

$$\frac{[C]\{u\}_i}{\Delta t_i}+\theta[K]\{u\}_i=\frac{[C]\{u\}_{i-1}}{\Delta t_i}-(1-\theta)[K]\{u\}_{i-1}+(1-\theta)\{F\}_{i-1}+\theta\{F\}_i \tag{g}$$

当 $\theta=0$ 时,式(g)就是向前插分逼近.类似地,当 $\theta=1$,就得到向后插分逼近.当 $\theta=\frac{1}{2}$,就得到中心插分结果.式(g)是很一般的,并允许分析学者对各种 θ 值进行试验以获得给定问题的最好的数值解.

7.4 在中空柱壁中的轴对称瞬时扩散问题是由相似于第三和六章中的方程并用柱坐标系表示的方程控制.事实上,在这里给出控制方程以作为参考:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)+m \tag{a}$$

构造控制方程所等价的有限元公式.

解 ☞ 假设用 $C=[N]\{C\}$ 来逼近 C 并代入到控制方程.用权函数相乘并在体积上积分:

$$\int_V [N]^T[N]\frac{\partial\{C\}}{\partial t}dV = \int_V [N]^T\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\frac{\partial[N]}{\partial r}\{C\}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[N]}{\partial z}\{C\}\right)+m\right]dV \quad \text{(b)}$$

其中 $dV=2\pi r\,dr\,dz$. 式(b)的右侧可以写为

$$2\pi\int_A [N]^T\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\frac{\partial[N]}{\partial r}\{C\}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rD_z\frac{\partial[N]}{\partial z}\{C\}\right)+mr\right]dr\,dz \quad \text{(c)}$$

注意,因为 r 与 z 无关,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[N]}{\partial z}\{C\}\right)r = \frac{\partial}{\partial z}\left(rD_z\frac{\partial[N]}{\partial z}\{C\}\right) \quad \text{(d)}$$

并且式(b)的前两项可用相似的格式表达. 对这两项应用 Green-Gauss 原理将得到定义轴对称瞬时扩散问题的局部有限单元的最终形式.

$$2\pi\int_A\left([N]^T[N]\frac{\partial\{C\}}{\partial t}+\frac{\partial[N]^T}{\partial r}rD_r\frac{\partial[N]}{\partial r}\{C\}+\frac{\partial[N]^T}{\partial z}rD_z\frac{\partial[N]}{\partial z}\{C\}\right)dr\,dz$$

$$= 2\pi\int_A [N]^T mr\,dr\,dz + 2\pi\int_S\left([N]^T rD_r\frac{\partial[N]}{\partial r}n_r + [N]^T rD_z\frac{\partial[N]}{\partial z}n_z\right)dS \quad \text{(e)}$$

最后两项代表流边界条件. 式(e)的数值计算等于在计算中包含 $2\pi r$ 笛卡儿坐标系下的数值积分.

7.5 一个关于题 5.25 中的两相扩散公式的分析解将在题 7.21 中给出. 使用一条 10 个二维线性有限单元求一个时间依赖的两相扩散的有限元解. 假设 $L=1.0$, $\Gamma=30$ 且物质参数 $D=0.5$, $\alpha=10$, $\beta=5$. 注意,对此问题物质参数是直观的,并不代表一个物理材料.

解 ☞ C_f 的边界条件在题 7.21 中指定, C_r 的边界条件必须计算以获得一个有限元解. 考虑第二个方程

$$\frac{dC_r(0,t)}{dt} = \beta C_f(0,t) - \alpha C_r(0,t) \quad \text{(a)}$$

且 $C_f(0,t)=\Gamma$. 边界处的方程为

$$\frac{dC_r}{dt} + \alpha C_r = \beta\Gamma \quad \text{(b)}$$

且有解

$$C_r = \frac{\beta\Gamma}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \quad \text{(c)}$$

题 5.25 的矩阵方程被用作有限元模型. 每个有限单元在每个结点处有两个自由度,且关于偶合扩散的公式的形成相似于在题 5.16 中讨论的. 使用题 3.5 中的式(e)模拟扩散项,使用题 3.33 的结果(化学反应项)模拟其他所有项,且对时间相关项 K_r 用 1 代替,对反应项 K_r 用 α 或 β 代替. 显示局部有限元刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{[N]^T[1][N]}{\Delta t}+[B]^T[D][B]+[N]^T[\beta][N] & -[N]^T[\alpha][N] \\ -[N]^T[\beta][N] & \frac{[N]^T[1][N]}{\Delta t}+[N]^T[\alpha][N] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_{fe} \\ C_{re} \end{Bmatrix}$$

使用等参单元计算这些结果并列在表 7.2 中. 注意题 7.21 中 C_r 的序列解只有很慢的收敛性并且要求许多项收敛到一个结果. 对于 $0.001\leqslant t\leqslant 0.01$ 使用 0.001 的时间增量计算有限元(FE)解,然后对于 $0.01\leqslant t\leqslant 0.1$ 使用 0.01 的时间增量,再后对于 $0.1\leqslant t\leqslant 1.5$ 使用 0.1 的时间增量. 稳定状态下的解为 $C_f=30$ 和 $C_r=15$.

表 7.2　两相扩散结果

时间			$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
0.005	FE	C_f	30	7.332	0.387	0.000	0.000	0.000
		C_r	0.732	0.137	0.003	0.000	0.000	0.000
	精确	C_f	30	4.640	0.137	0.000	0.000	0.000
		C_r	0.732	0.078	0.020	0.000	0.000	0.000
0.01	FE	C_f	30	10.991	2.014	0.092	0.001	0.000
		C_r	1.427	0.365	0.035	0.003	0.000	0.000
	精确	C_f	30	9.282	1.316	0.078	0.002	0.000
		C_r	1.427	0.250	0.035	0.013	0.000	0.000

续表

时间			x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
0.02	FE	C_f	30	14.176	4.839	1.214	0.264	0.106
		C_r	2.719	0.960	0.256	0.056	0.013	0.005
	精确	C_f	30	13.840	4.443	0.945	0.130	0.022
		C_r	2.719	0.793	0.171	0.034	0.013	0.009
0.04	FE	C_f	30	17.505	8.689	3.701	1.473	0.877
		C_r	4 945	2.232	0.903	0.315	0.111	0.060
	精确	C_f	30	17.575	8.702	3.577	1.259	0.641
		C_r	4.945	2.105	0.762	0.237	0.068	0.031
0.1	FE	C_f	30	21.249	14.229	9.232	6.291	5.326
		C_r	9.482	5.610	3.253	1.784	1.046	0.819
	精确	C_f	30	21.273	14.257	9.238	6.263	5.282
		C_r	9.482	5.656	3.165	1.696	0.947	0.719
0.5	FE	C_f	30	27.226	24 782	22.881	21.682	21.271
		C_r	14.899	12.702	11.209	9 998	9.271	9.020
	精确	C_f	30	27.603	25.412	23.779	22.706	22.338
		C_r	14.899	13.215	11.749	10.620	9.910	9.667
1.0	FE	C_f	30	29.244	28.565	28.028	27.683	27.565
		C_r	14.999	14.453	13.981	13.607	13.370	13.288
	精确	C_f	30	29.442	28.938	28.539	28.283	28.194
		C_r	14.999	14.606	14.252	13.972	13.792	13.730

7.6 式(7.2)描述了一个经典的弦振动问题.假设弦的横向运动是自由的谐运动,推导均质的控制微分方程.

解 ☞ 假设一个解

$$v(x,t) = V(x)T(t) \tag{a}$$

代入到式(7.2)中,并分离变量:

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{c^2 T}\frac{\mathrm{d}_2 T}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{b}$$

其中 ω 是振动频率.解由两个常微分方程所控制

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 V = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 = 0 \tag{c}$$

第二个方程的解有下列形式

$$T = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

由此知在假设条件下式(a)可以替换为

$$v(x,t) = V(x)e^{i\omega t} \tag{d}$$

代入到式(7.2)中可得到均质形式

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\rho}{T}\omega^2 V\right]e^{-i\omega t} = 0 \tag{e}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho}{T}\omega^2 V = 0 \tag{f}$$

7.7 使用有限元方法研究式(7.2)和题 7.6 所描述的自由弦振动.假设边界条件 $V(0) = V(L) = 0$.再设(a)具有关于弦中心对称性的一个三结点模型,(b)无对称性的一个三结点模型.

解 ☞ 使用题 7.6 的式(f)可导出局部有限元方程.设 $V = [N]\{V\}$ 且使用 Galerkin 方法构造加权余量方程.将 V 代入到式(f),乘以 $[N]^T$,并由 Gauss 原理化简:

$$\frac{\mathrm{d}[N]^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}[N]}{\mathrm{d}x} - \lambda[N]^T[N] = 0 \tag{a}$$

其中 $\lambda = \rho\omega^2/T$.

(a)在图 7-6 中展示了三结点模型.关于中心线的对称性允许使用一个有限单元.式(a)对应问题 2.11 中的式(d),并能写成如下形式(注意单元长度是 $L/2$)

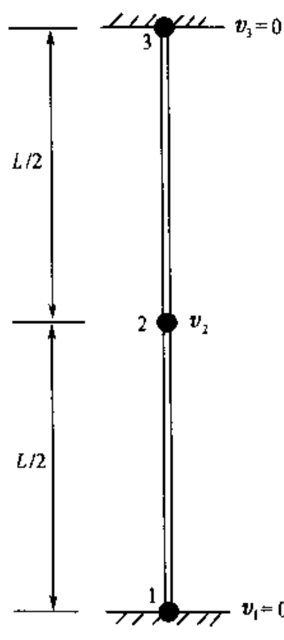


图 7-6

$$\frac{2}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}-\frac{\lambda L}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}=0$$

边界条件为 $v_1=0$ 并且消去后得到 $\lambda=12/L^2$. 然后, $\omega=(\lambda T/\rho)^{1/2}=(3.464/L)(T/\rho)^{1/2}$, 且比较由题 7.24 中给出的精确解 $\omega=(\pi/L)(T/\rho)^{1/2}$. 由于只能建立对称模式,因此分析者再使用对称性建立有限元模型时必须小心.换句话说,这不是一个好的做法.

(b)三单元模型相似于图 7-6. 除了长度是 $L/3$ 之外可使用相同的模型.整体有限元方程为

$$\frac{3}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{Bmatrix}-\frac{\lambda L}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{Bmatrix}=0$$

边界条件 $v_1=v_4=0$ 将方程降为 2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix}108-4\lambda L^2 & -(54-\lambda L^2)\\ -(54-\lambda L^2) & 108-4\lambda L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=0$$

或

$$(108-4\lambda L^2)^2-(54-\lambda L^2)^2=0$$

解此二次方程得到解

$$\omega_1=\frac{3.2863}{L}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}\quad 比作精确解\quad \omega_1=\frac{3.1416}{L}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$\omega_2=\frac{7.3485}{L}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}\quad 比作精确解\quad \omega_2=\frac{6.2823}{L}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$$

7.8　矩形薄膜振动是弦振动的二维对应情形并由如下形式的方程描述

$$T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\qquad(a)$$

其中 w 是偏转, T 是薄膜中张力, ρ 是密度.构造薄膜震动的有限元模型公式,用图 7-7说明的模型求其一解.

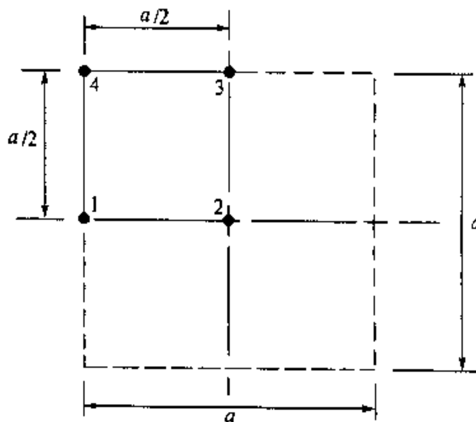


图 7-7

解 ☞ 假设式(a)有形如 $w(x,y,t)=W(x,y)e^{-i\omega t}$, 则可导致方程的分解

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\lambda W=0\qquad \lambda=\frac{\rho\omega^2}{T}\qquad(b)$$

想象一下对式(b)应用 Galerkin 逼近可导致结果

$$\frac{\partial[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}-\lambda[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{N}]=0\qquad(c)$$

图 7-7 中的薄膜是方形的并能用四个方形单元模拟.但是,所有的边界点都对应 $W=0$, 因此由对称性用一个方形单元可计算出相同的结果.如果使用更多的单元并且模拟了全部的薄膜,可以得到一个更完整的分析.如同在题 7.7 中注释的那样,在本例中的对称性的使用将把分解限制在只能找到一个对称模式.式(c)可用题 3.5 的式(e),

$k_x=k_y=1$, 和题 3.34 中给出最后一个方程, $K_r=\lambda$ 模拟.图 7-7 中的结点编号表明 $W_1=W_3=W_4=0$, 并可消去对应的行和列,得到

$$\frac{1}{6(a/2)^2}\left[2\frac{a^2}{4}+2\frac{a^2}{4}\right]-\lambda\frac{a^2}{4}\frac{1}{9}=0$$

由此得 $\omega^2=24T/a^2\rho$ 或 $\omega=(4.899/a)(T/\rho)^{1/2}$ 相当于精确解 $\omega=(4.443/a)(T/\rho)^{1/2}$(见题 7.26).

关于振动薄膜的有限元分析更为详细的细节由 Bickford(1990)给出.

7.9 描述一个梁结构横向运动的微分方程相似于式(4.1),并根据 Timoshenko(1995),可推导其有如下形式

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} \tag{a}$$

其中 ρ 是梁每单位长度的质量密度.假设它做自由简谐运动,推导对应的局部梁有限单元.

解 ☞ 在第四章中已经推导并分析了模拟式(a)左手项的梁有限元.剩下的只是建立一个关于方程右侧动力项的模型.使用 Galerkin 方法推导有限元模型具有教学的价值.遵循第五章中的方法并使用题 4.9 的式(g)和式(h)作为一个试解:

$$v(x,t) = [\mathrm{N}(x)]\{\mathrm{v}(t)\} \tag{b}$$

其中$[\mathrm{N}(x)] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$和$\{v(t)\} = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^{\mathrm{T}}$.将试解代入到控制方程:

$$EI\frac{\partial^4[\mathrm{N}]}{\partial x^4}\{\mathrm{v}\} + \rho[\mathrm{N}]\frac{\partial^2\{\mathrm{v}\}}{\partial t^2} = R(x,t;\{\mathrm{v}\}) \tag{c}$$

乘以权函数并在长度上积分:

$$\int_0^L EI[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\frac{\partial^4[\mathrm{N}]}{\partial x^4}\{\mathrm{v}\}\mathrm{d}x + \int_0^L \rho[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{N}]\frac{\partial^2\{\mathrm{v}\}}{\partial t^2} = 0 \tag{d}$$

对首项进行分部积分两次:

$$\int_0^L\left[EI\frac{\partial^2[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x^2}\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x^2}\{\mathrm{v}\} + \rho[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{N}]\frac{\partial^2\{\mathrm{v}\}}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}x = EI\left[\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x}\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x^2}\{\mathrm{v}\} - [\mathrm{N}]\frac{\partial^3[\mathrm{N}]}{\partial x^3}\{\mathrm{v}\}\right]_0^L$$

等号右边的项代表关于第四章中偏转和坡度或力矩和剪切力的边界条件,且它被视为由作用的横向负载所引起的连接负载.没有横向负载的自由震动问题由在体积分内的微分方程所控制.假设一个如下形式的解

$$v(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$$

并代入到微分方程就得到对应的特征值问题:

$$\int_0^L\left(EI\frac{\partial^2[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x^2}\frac{\partial^2[\mathrm{N}]}{\partial x^2}\{\mathrm{V}\} - \rho\omega^2[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{N}]\{\mathrm{V}\}\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{e}$$

式(e)的首项是在第四章中题 4.4 的式(f)和(g)导出的刚度矩阵.式(e)的第二项定义了质量矩阵:

$$[\mathrm{m}] = \int_0^L \rho[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{N}]\mathrm{d}x \tag{f}$$

题 4.9 的式(c)—(f)用来计算质量矩阵.积分内的矩阵相乘后为

$$\frac{\rho}{L^3}\begin{Bmatrix} 2x^3 - 3x^2L + L^3 \\ x^3L - 2x^2L^2 + xL^3 \\ -2x^3 + 3x^2L \\ x^3L - x^2L^2 \end{Bmatrix}\frac{1}{L^3}[2x^3 - 3x^2L + L^3 \quad x^3L - 2x^2L^2 + xL^3 \quad -2x^3 + 3x^2L \quad x^3L - x^2L^2]$$

积分并代入积分限后,质量矩阵变为(Logan,1986)

$$[\mathrm{m}] = \frac{\rho L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{g}$$

总之,一个梁的弦振动的特征值问题可以写为

$$[\mathrm{K}]\{\mathrm{V}\} - \omega^2[\mathrm{m}]\{\mathrm{V}\} = 0 \tag{h}$$

7.10 使用一个梁单元计算一个在端点固定的梁的自由振动的自然频率.

解 ☞ 将题 4.4 的式(f)和在题 7.9 中导出的质量矩阵式(g)合并.边界条件为 $v(0) = v(L) = 0$.从有限元矩阵中消去第一和第三行与列:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2\rho L}{420}\begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{a}$$

解式(a)得

$$\omega_1 = \frac{10.954(EI/\rho)^{1/2}}{L^2} \qquad 和\ \omega_2 = \frac{50.120(EI/\rho)^{1/2}}{L^2}$$

精确解可以计算为

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2(EI/\rho)^{1/2}}{L^2} \qquad 或 \qquad \omega_1 = \frac{9.867(EI/\rho)^{1/2}}{L^2} \qquad 和\ \omega_2 = \frac{39.478(EI/\rho)^2}{L^2}$$

7.11 遵循应用在第三章，第五章和第六章的方法，构造对应一个更一般的弹性的自由振动问题的公式．可以导出一个一般化的表达式，然后使之专用于表示一个特殊的应用．使用九结点拉格朗日有限单元研究轴对称柱坐标系中的一个有限柱体的自由震动．

解 ☞ 弹性方程可以用笛卡儿张量记号表示为

$$\sigma_{ij,j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad i \neq j \tag{a}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{b}$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \tag{c}$$

设 $u_i = [\mathrm{N}]\{\mathrm{u}\}$ 为一试解，从式(c)可以得到

$$\{\varepsilon\} = [\mathrm{L}][\mathrm{N}]\{\mathrm{u}\} = [\mathrm{B}]\{\mathrm{u}\} \tag{d}$$

将式(c)代入到式(b)．然后代入试解，在乘以权函数并积分后，结果为

$$\int_V\left(\frac{\partial[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}[\mathrm{C}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{u}\} + [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\rho[\mathrm{N}]\frac{\partial^2\{\mathrm{u}\}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V = \int_S[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{C}]\frac{\partial[\mathrm{N}]}{\partial x_i}\{\mathrm{u}\}\mathrm{d}S \tag{e}$$

公式，式(e)，是很一般的并能表示任何弹性问题．轴对称弹性问题由式(3.17)和(3.18)定义，并在6.7节中转化到轴对称的 r, z 坐标中．式(a)对应包含有动力项的式(6.6)和(6.7)．式(c)是对应式(6.5)的一般叙述．式(b)对应题3.26中的式(d)．注意那些不熟悉下标张量记号的读者必须知道式(a)—(c)在除了笛卡儿坐标系以外的任何系统中不能扩展成弹性方程．目的在于得到式(e)并将此方程用来表示一个特殊的应用．

式(e)是自由振动问题的一般形式并可写成另一种形式．忽略张力边界条件，

$$\int_V\left([\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{C}][\mathrm{B}]\{\mathrm{u}\} + [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\rho[\mathrm{N}]\frac{\partial^2\{\mathrm{u}\}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{f}$$

式(f)的第二项称作相容质量矩阵，并用形状函数而不是按比例的将质量集中在单元结点上来构造．用式(f)定义自由振动问题并设一个合适的简谐函数表示加速度项．所设函数满足弹性原理的位移

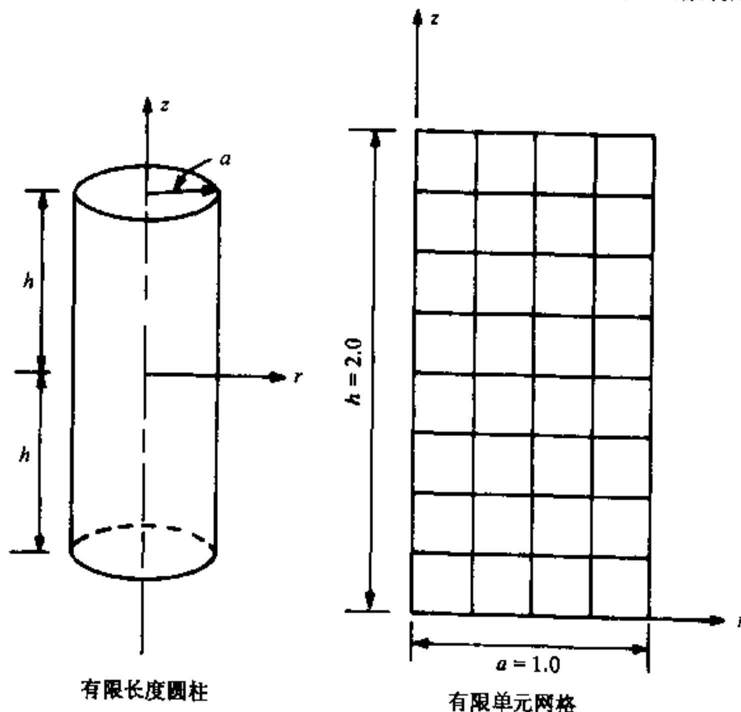


图 7-8

方程.将应变-位移方程,式(6.5),代入到连续方程,式(3.18),然后将结果代入到应力守恒方程,式(6.6)和(6.7),就得到用位移表示的控制方程.满足位移守恒方程的函数有

$$u(r,z,t)=U(r,z)e^{-i\omega t}\qquad v(r,z,t)=V(r,z)e^{-i\omega t}\tag{g}$$

其中 ω 是圆频率.式(f)的一般式变成

$$[\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M}]\{\mathrm{U}\}=0\tag{h}$$

九结点 Lagrange 单元在题 6.24 中定义.矩阵[B]的公式推导遵循题 6.12 的式(a)和(b)(也可见题 3.26),并使用九结点形状函数而不是四结点形状函数,所得的结果矩阵[B]是 4×18 的.矩阵[C]等价于题 3.26 中的式(d),是一个 4×4 矩阵.根据式(f)并用九结点 Lagrange 形状函数,构造质量矩阵[M]的公式.显示质量矩阵为

$$[\mathrm{M}]=\int_V\begin{bmatrix}N_1&0\\0&N_1\\N_2&0\\0&N_2\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\N_9&0\\0&N_9\end{bmatrix}_{18\times2}\begin{bmatrix}\rho&0\\0&\rho\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}N_1&0&N_2&0&\cdots&N_9&0\\0&N_1&0&N_2&\cdots&0&N_9\end{bmatrix}_{2\times18}\mathrm{d}V\tag{i}$$

其中 $\mathrm{d}V=2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ 由于在每个结点上都有两个自由度,因此矩阵[ρ]在两个对角元上都有项.所得的局部有限单元是一个 18×18 矩阵.

Hutchinson(1967)研究了图 7-8 中的轴对称有限长度的圆柱.边界条件为 $u(a,z,t)=0$,即沿柱的侧面 r 方向上的位移为零,$w(a,z,t)=0$,$w(r,\pm h,t)=0$,即在柱的所有边界上 z 方向上的位移为零,且 $\sigma_{rz}(a,\pm h,t)=0$,即在柱的所有外表面剪切力为零.在本次有限元法的应用中可以使用对称性;使用八个九结点单元模拟柱体,结果为 45 个结点和 90 个自由度.模型在图 7-8 中显示,且 $a=1$,$h=2$,$\nu=0.3$.关于前四个频率的结果在表 7.3 中进行了比较.

表 7.3　关于有限长度柱体的频率

方法	1	2	3	4
Hutchinson	2.7466	4.4597	5.5546	5.8402
有限元	2.7485	4.4742	5.6349	5.9339

Cheng(1988)给出了轴对称柱体的其他的一些结果,以及一个关于由题 5.19 给出的方程所定义的压电性柱体的应用.

7.12　描述一个长柱的微分方程相似于式(4.1)并可用材料的初等力学导出为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4}+P\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=0\tag{a}$$

其中 P 是一个作用在柱端处的同轴的轴向力.推导一个能够用来描述具有同轴轴向负载的柱体变形行为的局部有限单元.

解　☞ 推导遵循题 7.9 中的过程,其中使用 Galerkin 方法推导模拟式(a)中首项的梁有限元.此技术可用来推导关于式(a)中第二项的有限元模型.假设一个如同题 7.9 中的试解:

$$v(x,t)=[\mathrm{N}(x)]\{\mathrm{v}(t)\}\tag{b}$$

其中$[\mathrm{N}(x)]=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]$和$\{\mathrm{v}(t)\}=[v_1\quad\theta_1\quad v_2\quad\theta_2]^{\mathrm{T}}$.将试解代入到控制方程.然后,乘以权函数并在长度上积分:

$$\int_0^L EI[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}^4[\mathrm{N}]}{\mathrm{d}x^4}\{\mathrm{v}\}\mathrm{d}x+\int_0^L P[\mathrm{N}]^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}^2[\mathrm{N}]}{\mathrm{d}x^2}\{\mathrm{v}\}\mathrm{d}x=0\tag{c}$$

分别用两次和一次分部积分法积分首项和次项.如同题 7.9 中的那样,存在关于代表剪切力,力矩和轴向力的结点(连接)负载的边界条件.忽略一些可能的连接负载并专心于控制柱体弯曲的特征值问题:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^2[N]^T}{dx^2} \frac{d^2[N]}{dx^2} \{v\} + P \frac{d[N]^T}{dx} \frac{d[N]}{dx} \{v\} \right) dx = 0 \tag{d}$$

式(d)的首项是题 7.9 中的刚度矩阵.第二项必须用在题 4.9 中式(c)—(f)给出的形状函数导数来计算.积分中的矩阵相乘后如下

$$\frac{P}{L^3}\begin{Bmatrix} 6x^2 - 6xL \\ 3x^2L - 4xL^2 + L^3 \\ -6x^2 + 6xL \\ 3x^2L - 2xL^2 \end{Bmatrix} \frac{1}{L^3}[6x^2 - 6xL \quad 3x^2L \quad 4xL^2 + L^3 \quad -6x^2 + 6xL \quad 3x^2L - 2xL^2]$$

再积分并代入积分限后,代表轴向力在弯曲刚度上作用的矩阵变为(Chajes, 1974)

$$[D] = \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{e}$$

总之,关于对一个柱体的临界弯曲负载的特征值问题可以写为

$$[K]\{v\} - \lambda^2[D]\{v\} = 0 \qquad \lambda^2 = \frac{P}{EI} \tag{f}$$

7.13 使用一个有限单元计算对一个两端固定的一个柱体的临界变形负载.

解 ☞ 将题 4.4 中的式(f)和在题 7.12 中导出的式(g)合并.边界条件为 $v(0) = v(L) = 0$.从有限元矩阵中消去第一与第三行和列如下:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 4L^2 & L^2 \\ L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{a}$$

解式(a)得到 $P_{cr} = 9.689EI/L^2$ 和 $P_2 = 74.311EI/L^2$.精确解可计算为 $P_n = n^2\pi^2EI/L^2$,或 $P_{cr} = 9.867EI/L^2$和 $P_2 = 39.478EI/L^2$.

7.14 在图 7-9 中显示了一个在 ξ, η, ψ 坐标系中的八结点等参有限单元.

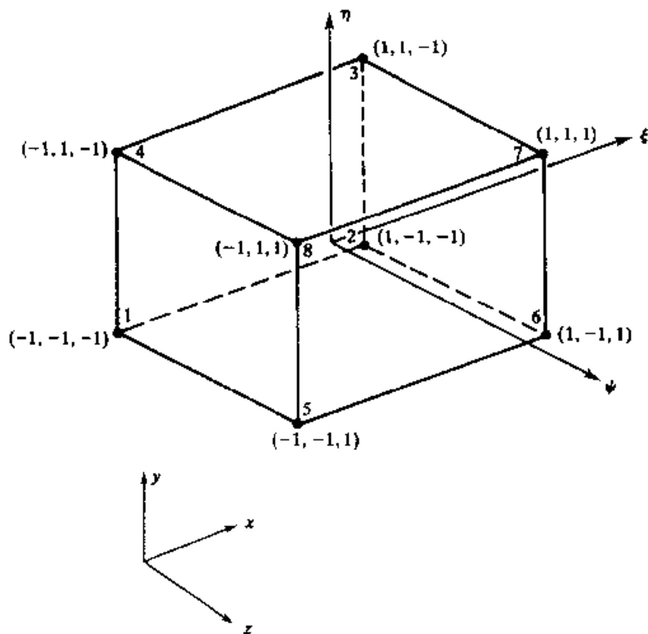


图 7-9

解 ☞ 参照题 6.4 和图 7-9 中的结点 1,其中包含结点 1—4 的平面对应 $\psi = -1$.沿着 ψ 轴的一个线性一维插值公式为 $L_{1\psi} = \frac{1}{2}(\psi - 1)/(-1-1)$. ξ 和 η 方向上的线性一维插值公式已在题 6.4 中给出并能与 $L_{1\psi}$合并为

$$N_1 = L_{1\xi}L_{1\eta}L_{1\psi} = \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\psi)}{8}$$

相似地，余下的函数计算为

$$N_2 = L_{2\xi}L_{2\eta}L_{2\psi} = (1+\xi)(1-\eta)(1-\psi)/8$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(1-\psi)/8 \qquad N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(1-\psi)/8$$

$$N_5 = (1-\xi)(1-\eta)(1+\psi)/8 \qquad N_6 = (1+\xi)(1-\eta)(1+\psi)/8$$

$$N_7 = (1+\xi)(1+\eta)(1+\psi)/8 \qquad N_8 = (1+\xi)(1+\eta)(1-\psi)/8$$

7.15　图 7-10 中显示了一个四结点一维等参单元. 使用 Lagrange 多项式推导形状函数.

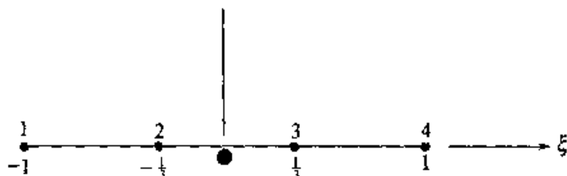


图 7-10

解　☞ 参照图 7-10 并代入到式(6.3)：

$$L_1 = -\frac{9}{16}\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1) \qquad L_2 = \frac{27}{16}(\xi+1)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1)$$

$$L_3 = -\frac{27}{16}(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(\xi-1) \qquad L_4 = \frac{9}{16}(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)$$

7.16　讨论两结点一维线性单元的连续性以及它对一维热传导的应用.

解　☞ 两结点单元的连续性在图 2-4 和 2-5 中用图形显示出来. 形状函数在结点处是 C^0 连续的，但是，其一阶导数是不连续的. 因此可得结论，两结点一维单元是 C^0 类的. 对此结论可能存在一个例外. 假设控制方程和边界条件

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \qquad T(0) = 0 \qquad T(L) = T_0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant L$$

解为 $T(x) = T_0x/L$ 和 $dT/dx = T_0/L$. 函数是连续的，且它的一阶导数也是连续的. 因此函数至少是 C^1 类的. 由于一线性函数是控制微分方程的精确解，所以形状函数有相同的性质. 当然从有限元的观点来看，有关此问题的分析是没有什么价值的.

7.17　使用 Mindlin 原理和式(7.16)作为计算对应金属板变形的应变能量的基本关系，推导金属板变形的一个局部刚度矩阵. 使用应变能量推导平板单元遵循在第四章导出的关于推导梁有限元的概念.

解　☞ 将要推导的有限单元被 Hughs(1987)命名为"杂种"单元，并且这里的讨论遵循 Cook 等人(1989)的做法. 推导是一般性的并可用于任何单元；同时它将被专门用于对应杂种单元. 单元的未知量是平板旋转和横向变形，并根据任何单元的自由度来定义使用一个合适的形状函数. 假设在单元未知量和结点未知量之间有如下关系：

$$\begin{Bmatrix} w_e \\ \theta_{xe} \\ \theta_{ye} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots \text{对}\ n\text{、} \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \text{单元、} \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots \text{节点重复} \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

或

$$\{u\} = [N]_{3\times 3n}\{d\} \qquad \text{(b)}$$

其中 $\{u\}$ 是单元未知量，$[N]$ 是单元形状函数，且 $\{d\}$ 是结点未知量：

$$\{d\} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \cdots \quad w_n \quad \theta_{xn} \quad \theta_{yn}]^T \qquad \text{(c)}$$

一般地，平板变形的应变能量可以写为

$$U = \frac{1}{2}\int_A\int_{-h/2}^{h/2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\}dz\,dA \qquad \text{(d)}$$

其中 A 为平板中平面的面积且 $\{\varepsilon\}$ 在式(7.14)中定义. 积分是通过平板厚度的，并且 7.7 节中的方程

被用来将应变能量转换成对应式(7.15)和(7.16)的矩阵如下：

$$U=\frac{1}{2}\int_A\{\kappa\}^T[D_M]\{\kappa\}dA \tag{e}$$

在每个结点处有三个由式(a)定义的自由度 w,θ_x 和 θ_y.式(7.15)的曲率由结点未知量并用一个算子矩阵来定义

$$\{\kappa\}=[L][N]\{d\}=[B]\{d\} \tag{f}$$

其中[L]是如下的 5×3 矩阵：

$$[L]=\begin{bmatrix}0 & \partial/\partial x & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial y\\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x\\ -\partial/\partial y & 0 & 1\\ -\partial/\partial x & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{g}$$

应变能量可以定义为

$$U=\frac{1}{2}\int_A\{d\}^T[N]^T[L]^T[D_M][L][N]\{d\}dA=\frac{1}{2}\int_A\{d\}^T[B]^T[D_M][B]\{d\}dA \tag{h}$$

式(h)导致刚度矩阵的公式的形成为

$$[K]=\int_A[B]^T[D_M][B]dA \tag{i}$$

推导过程完全是一般性的,式(i)可用来构造使用任何形状函数的一个有限单元公式.现在刚度矩阵将被专用于对应杂种单元.

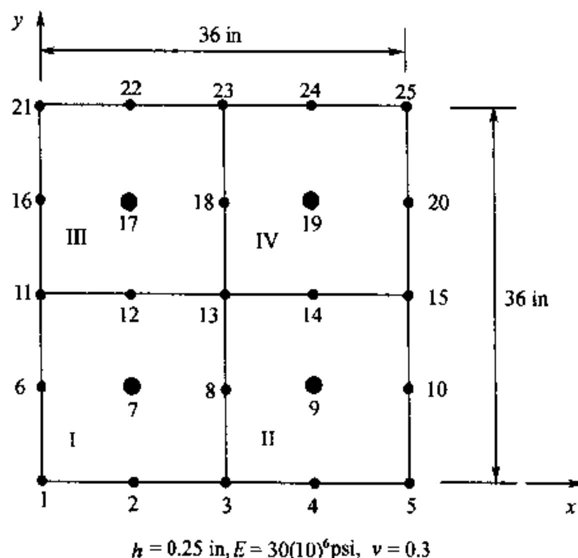


图 7-11

杂种单元在图 7-11 中所示为一个九结点四边等参平板单元,并且事实上它是九结点拉格朗日单元(见题 6.24)和在第六章讨论的标准八结点单元(见题 6.25)的组合.角和边中结点有三个自由度,θ_x,θ_y 和 w,而中心结点只有两个自由度,θ_x 和 θ_y.单元总共有 26 个自由度.Lagrange 形状函数由来模拟旋转 θ_x 和 θ_y,并且标准的八结点单元用来模拟横向平板变形 w.由此得到单元刚度矩阵,式(i),被分裂成两个刚度矩阵,一个模拟变形,一个模拟横向剪切力.

$$[K]=[K_b]+[K_s] \tag{j}$$

其中

$$[K_b]=\int_A[B_b]^T[D_b][B_b]dA \tag{k}$$

$$[K_s]=\int_A[B_s]^T[D_s][B_s]dA \tag{l}$$

通过分析式(f)定义的结果[B]=[L][N],可最好地表现刚度矩阵的分裂.令 P 归 9 结点 Lagrange 形状函数(旋转),N 表示标准的八结点形状函数(变形).注意写出一个表示形状函数 P 和 N 组合的类

似于式(a)的一个矩阵方程是不可行的.杂种矩阵[B]可构造为

$$\begin{bmatrix} 0 & \partial P_1/\partial x & 0 & 0 & \partial P_2/\partial x & 0 & \cdots & \partial P_9/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial P_1/\partial y & 0 & 0 & \partial P_2/\partial y & \cdots & 0 & \partial P_9/\partial y \\ 0 & \partial P_1/\partial y & \partial P_1/\partial x & 0 & \partial P_2/\partial y & \partial P_2/\partial x & \cdots & \partial P_9/\partial y & \partial P_9/\partial x \\ -\partial N_1/\partial y & 0 & P_1 & -\partial N_2/\partial y & 0 & P_2 & \cdots & 0 & P_9 \\ -\partial N_1/\partial x & P_1 & 0 & -\partial N_2/\partial x & P_2 & 0 & \cdots & P_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{m}$$

式(k)和(l)的矩阵可表示为

$$\underset{[3\times 26]}{[B_b]} = \begin{bmatrix} 0 & \partial P_1/\partial x & 0 & 0 & \partial P_2/\partial x & 0 & \cdots & \partial P_9/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial P_1/\partial y & 0 & 0 & \partial P_2/\partial y & \cdots & 0 & \partial P_9/\partial y \\ 0 & \partial P_1/\partial y & \partial P_1/\partial x & 0 & \partial P_2/\partial y & \partial P_2/\partial x & \cdots & \partial P_9/\partial y & \partial P_9/\partial x \end{bmatrix} \tag{n}$$

$$\underset{[2\times 26]}{[B_s]} = \begin{bmatrix} -\partial N_1/\partial y & 0 & P_1 & -\partial N_2/\partial y & 0 & P_2 & \cdots & 0 & P_9 \\ -\partial N_1/\partial x & P_1 & 0 & -\partial N_2/\partial x & P_2 & 0 & \cdots & P_9 & 0 \end{bmatrix} \tag{o}$$

$$[D_b] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)D/2 \end{bmatrix} \qquad [D_s] = \begin{bmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{bmatrix} \tag{p}$$

7.18 图 7-11 中的方形平板为 36×36 英寸和 0.25 英寸厚.平板被简单地用一个作用在中心结点,结点 13 的 1000 磅的负载所支撑,并且用四个杂种单元模拟.

(a)设有钢的材料常数,并计算每结点处的变形和旋转.$E=30(10)^6$ 磅/平方英寸和 $\nu=0.3$.

(b)设有铝的材料常数,并计算每结点处的变形和旋转.$E=9.5(10)^6$ 磅/平方英寸和 $\nu=0.29$.

解 ☞ 根据题 7.17 的式(j)构造刚度矩阵的公式.负载矢量只有一个非零项,且对应第一个自由度并作用在结点 13 处的负载为 1000 磅.沿着平板边沿的所有变形边界条件都定为零,且相切于平板边沿的切线为零.结果在表 7.4 中给出,并与由 Timoshenko 和 Woinowsky-Krieger(1959)给出的结果进行了比较.由于对称性,表中只列出了有关对应单元 I 的结点的结果.

(a)在结点 13 处的变形的精确解为 $w_{13}=0.35022$ 英寸.

(b)在结点 13 处的变形的精确解为 $w_{13}=1.11314$ 英寸.

表 7.4　对简单支撑平板的有限元解

结点	(a) 平板			(b) 铝平板		
	w(英寸)	θ_x	θ_y	w(英寸)	θ_x	θ_y
1	0.00000	0.00177	0.00163	0.00000	0.00564	0.00523
2	0.00000	0.00600	0.01421	0.00000	0.01918	0.45381
3	0.00000	0.00001	0.03170	0.00000	0.00004	0.10119
6	0.00000	0.01416	0.00602	0.00000	0.04520	0.01925
7	*	0.01346	0.01345	*	0.04285	0.04282
8	0 24265	0.00000	0.02765	0.77350	0.00000	0.08813
11	0.00000	0.03178	−0.00003	0.00000	0.10148	−0.00008
12	0.24263	0.02765	0.00001	0.77349	0.08812	0.00003
13	0.35008	0.00000	0.00000	1.11533	−0.00001	−0.00002

*杂种单元的中心结点没有变形值

补 充 习 题

7.19 设有一个充满一均质材料且长度为 L 的一维空间.空间中有一初始温度 T_i.空间的表面定义为 $x=0$ 和 $x=L$.其上的温度瞬间变化到 T_F.求此问题的分析解.

7.20　设题 7.19 中定义的材料 12 英寸厚，并且初始时有一个 50℉的定常的温度分布．令 $\rho=120$ 磅/平方英尺，$c=0.2$ Btu(磅·℉)，$k=0.5$ Btu(h·磅·℉)．假设温度在每个表面处，$x=0$ 和 $x=1$ 英尺，温度升到 80℉，使用 10 个相等的有限单元求其一解，并与分析解进行比较．使用两结点线性一维单元或一条四结点二维单元，并对时间导数应用向后插分．

7.21　在题 5.25 中给出一组定义两相扩散的偶合方程．设由方程定义的材料占据着空间 $0\leqslant x\leqslant L$，且在边界处受 C_f 变化的约束．边界和初始条件为

$$C_f(0,t)=C_f(L,t)=\Gamma \qquad t>0 \tag{a}$$

$$C_f(x,0)=C_r(x,0)=0 \qquad 0\leqslant x\leqslant L \tag{b}$$

求此问题的分析解．

7.22　求题 7.4 中的式(a)定义的轴对称瞬时扩散问题的一个分析解．设 C 是 r 和 t 的函数，并将问题降为一维问题．设有对应中空柱体的边界条件 $C(r=1,t)=10$ 和 $\partial C(r=2,t)/\partial r=0$，初始条件 $C(r,0)=0$．

7.23　求一个由题 7.4 和 7.22 所定义扩散问题的四单元有限元解．

7.24　求由式(7.2)所定义弦振动问题的分析解．

7.25　一个杆的自由纵向振动由一个相似于式(2.4)的微分方程控制，并写为

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{a}$$

(a)设有自由-自由边界条件，使用两个线性有限单元计算一个解，并与精确解进行比较．

(b)设有固定-自由边界条件，使用两个线性有限单元计算一个解，并与精确解进行比较．

7.26　求在题 7.8 中所定义的薄膜振动的分析解．

7.27　使用一个梁单元计算一个一端固定、一端自由的梁的自由振动的本质频率

7.28　求在下列条件下，柱的临界弯曲负载的分析解：(a)钉住-钉住，(b)钉住-固定，(c)固定-固定，(d)固定-自由．

7.29　使用有限元方法计算一个两端固定的梁的临界弯曲负载．并与精确解进行比较．

7.30　使用有限元方法计算一个固定-自由的梁的临界弯曲负载．并与精确解进行比较．

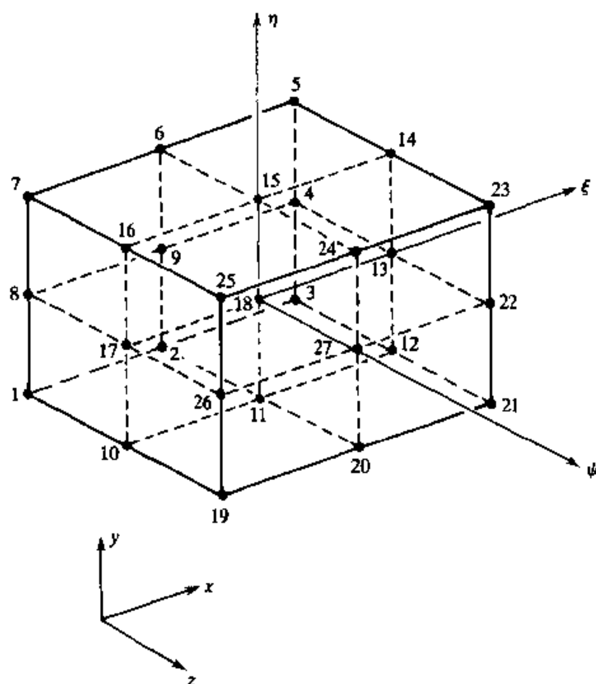


图 7-12　27 节点 Lagrange 单元

7.31　在图 7-12 中显示了一个二次三维 Lagrange 有限单元．使用题 7.14 中的方法推导对应的形状函数．

7.32　在图 7-13 中所示的三维等参有限单元是具有 20 个边结点的二次单元．除了没有内部结点外，此单元相似于题 7.31 中的二次单元．推导对应的形状函数．

7.33　在图 7-14 中显示了一个 12 结点的二维三次等参有限单元．推导对应的形状函数．

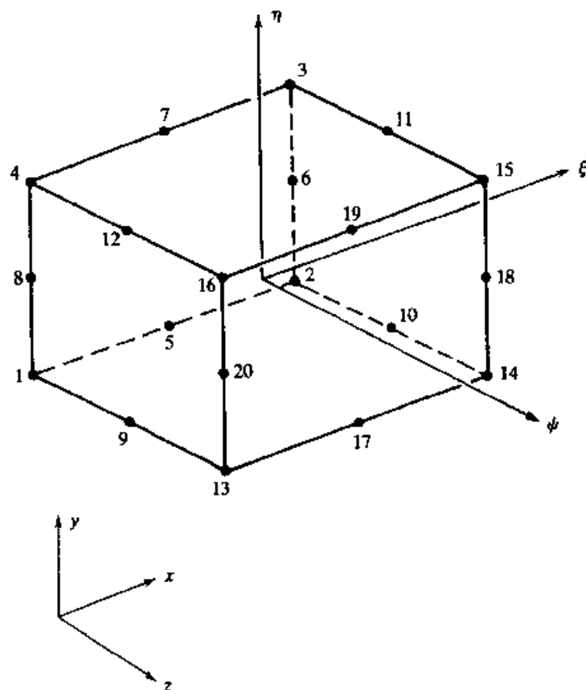


图 7-13　20 节点单元

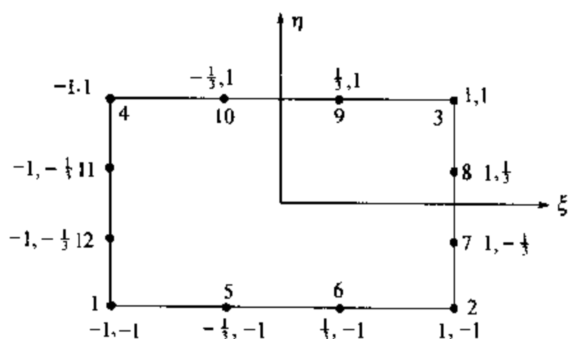


图 7-14　三次单元

补充习题答案

7.19　在基本的热传导问题中，控制微分方程通常写为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{a}$$

其中 $\alpha=\rho c/k$[不要与式(7.1)中的 α 相混]．初始条件为 $T(x,0)=T_i-T_F=T_0$，表示温度的改变．边界条件可用温度变化来表达并且是齐次的，$T(0,t)=T(L,t)=0$．使用变量分离法解式(a)．此问题是很基本的并能在许多有关热传导的书籍中找到(Gebhart, 1961)．当初始温度分布为定常时，得到结果为

$$T(x,t)=T_0\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\alpha t}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{b}$$

其中 $\lambda=(n\pi/L)^2$．

7.20　使用一条大小为 0.2×0.2 英寸的二维单元可得到结果．材料矩阵被定义为在题 7.2 中的式(d)所定义并形如$[N]^T[\rho c][N]$的容量矩阵的一部分．并且当形状函数矩阵被定义为一个 2×4 矩阵时，材料矩阵可写为如下：

$$[\rho c]=\begin{bmatrix}\rho c & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

对热传导性矩阵$[k]$不需要相似的改变.在表7.5中列出了结果.对2 h使用0.2 h的时间增量,然后用0.5 h来完成分析.结果关于条中心是对称的,且只给出一半条的结果.

表7.5 瞬时热变换的有限元解

x(英尺)	时间(h)							
	0.4		1		5		15	
	FE	精确	FE	精确	FE	精确	FE	精确
0.0	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
0.1	12.97	13.16	18.56	18.73	25.68	25.77	29.40	29.46
0.2	3.96	3.64	9.73	9.82	21.79	21.97	28.86	28.97
0.3	0.98	0.61	4.41	4.27	18.70	18.95	28.43	28.57
0.4	0.23	0.05	1.89	1.60	16.72	17.01	28.15	28.34
0.5	0.09	0.01	1.18	0.86	16.04	16.34	28.06	28.25

7.21 要解的方程为

$$\frac{\partial C_f}{\partial t}-D\frac{\partial^2 C_f}{\partial x^2}+\beta C_f-\alpha C_r=0\qquad \frac{\partial C_r}{\partial t}-\beta C_f+\alpha C_r=0$$

由 Gurtin 和 Yatomi(1979)可得解:

$$C_f(x,t)=\Gamma\left[1-\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{(p_n-\alpha-\beta)\exp(-p_nt)-(q_n-\alpha-\beta)\exp(-q_nt)}{n(p_n-q_n)}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

$$C_r(x,t)=\frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left[1-\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{p_n\exp(-p_nt)-q_n\exp(-q_nt)}{n(p_n-q_n)}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

其中

$$\left.\begin{matrix}p_n\\ q_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\{\alpha+\beta+\lambda_n\pm[(\alpha+\beta\lambda_n)^2+4\beta\lambda_n]^{1/2}\}\qquad \lambda_n=D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

此精确分析能被用来证明对应的偶合有限元分析.

7.22 控制方程为

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{D}{r}\frac{\partial C}{\partial r}=\frac{\partial C}{\partial t}\qquad t>0,1\leqslant r\leqslant 2 \tag{a}$$

分离变量$C(r,t)=T(t)R(r)$,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\lambda^2=0\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+D\lambda^2T=0 \tag{b}$$

有解

$$C(r,t)=T(t)R(r)=\exp\left(\frac{-D\lambda^2t}{2}\right)[AJ_0(\lambda r)+BY_0(\lambda r)] \tag{c}$$

其中J_0和Y_0是零阶 Bessel 函数,且常数 A 和 B 由初始条件和边界条件决定. Kardomateas(1989)给出了式(c)的一个一般解,并得到

$$C(r,t)=a+\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-D\lambda_n^2t}{2}\right)[A_nJ_0(\lambda_nr)+B_nY_0(\lambda_nr)] \tag{d}$$

其中λ_n是下面方程的实根

$$[\xi Y_1(2\xi)]J_0(\xi)-[\xi J_1(2\xi)]Y_0(\xi)=0 \tag{e}$$

由边界条件得到

$$\begin{aligned}a&=10\\ A_n&=10\pi[Y_0(\lambda_n)]\frac{[\lambda_nJ_1(2\lambda_n)]^2}{F(\lambda_n)}\\ B_n&=-10\pi[J_0(\lambda_n)]\frac{[\lambda_nJ_1(2\lambda_n)]^2}{F(\lambda_n)}\\ F(\lambda)&=[\lambda_nJ_0(\lambda_n)]^2-[\lambda_nJ_1(2\lambda_n)]^2\end{aligned} \tag{f}$$

7.23 在表7.6中给出了使用向后插分方法的结果.使用0.05的时间增量直到$t=0.5$,然后增加到0.1直到$t=1.0$,再后增加到0.5直到完成分析.

表 7.6　轴对称扩散的解

r	时间(h)							
	0.1		0.5		1.0		5.0	
	FE	精确	FE	精确	FE	精确	FE	精确
1.00	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
1.25	3.830	3.854	6.665	6.654	7.892	7.904	9.904	9.948
1.50	1.041	0.935	4.314	4.286	6.390	6.411	9.836	9.912
1.75	0.239	0.136	2.952	2.902	5.504	5.529	9.796	9.890
2.00	0.097	0.023	2.523	2.458	5.222	5.244	9.783	9.883

7.24　完成开始于题 7.6 的分析.式(c)中的第一式的解为

$$V = C\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + D\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

且 $v(0,t)=v(L,t)=0$,则得到 $D=0$.其解为 $v(x,t)=(A\sin\omega t + B\cos\omega t)\sin(\omega x/c)$.非平凡解为 $\sin(\omega L/c)=0$.$\omega L/c=\pi$ 满足此结果.代入 c 并归纳到振动的高阶模式得

$$\omega = \frac{n\pi}{L}\left[\frac{T}{\rho}\right]^{1/2} \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{a}$$

7.25　精确解遵循题 7.6 和 7.24 并由 Timoshenko(1955)给出.设 $u(x,t)=U(x)(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$并代入到式(a),得到 $U=C\sin(\omega x/c)+D\cos(\omega x/c)$且 $c=(E/\rho)^{1/2}$.

(a)自由-自由的边界条件对应

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x} = \frac{\partial u(L)}{\partial x} = 0$$

并得 $\omega=(n\pi/L)(E/\rho)^{1/2}$, $n=1,2,3,\cdots$.有限元方程相似于题 7.7 中的式(a),且一个两单元模型的整体矩阵为

$$\frac{2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{\lambda L}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{a}$$

其中 $\lambda=\rho\omega^2/E$.解式(a)得 $\omega=0$(由自由-自由的边界条件引起的刚性体模式), $\omega_1=(3.4641/L)(E/\rho)^{1/2}$, $\omega_2=(6.4142/L)(E/\rho)^{1/2}$.

(b)固定-自由的边界条件对应

$$u(0) = \frac{\partial u(L)}{\partial x} = 0$$

并得 $\omega=(n\pi/2L)(E/\rho)^{1/2}$, $n=1,3,5,\cdots$.整体矩阵相似于式(a)中的矩阵,且 $u_1=0$:

$$\frac{2}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{\lambda L}{2}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{b}$$

解式(b)得 $\omega_1=(1.6114/L)(E/\rho)^{1/2}$, $\omega_2=(5.6293/L)(E/\rho)^{1/2}$,并可与精确解相比.

7.26　用变量分离的方法解题 7.8 中的式(a).Meirovich(1967)给出了一个大小为 a×b 的矩形薄膜的完整解为

$$\omega_{mn} = \pi\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$$

7.27　边界条件为 $v(0)=\mathrm{d}v(0)/\mathrm{d}x=0$.通过消去第一和第二行与列更改一维梁矩阵:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2\rho L}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = 0$$

解此方程得

$$\omega_1 = \frac{3.534(EI/\rho)^{1/2}}{L^2} \quad 和 \quad \omega_2 = \frac{38.527(EI/\rho)^{1/2}}{L^2}$$

由 Timoshenko(1995)可计算精确解为

$$\omega_1 = \frac{3.515(EI/\rho)^{1/2}}{L^2} \quad 和 \quad \omega_2 = \frac{22.034(EI/\rho)^{1/2}}{L^2}$$

7.28 解题 7.12 中的式(a). 参照 Chajes(1974).

$$(a)\ P_n = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \qquad (b)\ P_{cr}\ \frac{\pi^2EI}{(0.7L)^2}$$

$$(c)\ P_{cr} = \frac{4\pi^2EI}{L^2} \qquad (d)\ P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{(2L)^2}$$

7.29 固定-固定柱体将需要最少两个长度为 $L/2$ 的有限单元. 合并两个局部单元并消去整体单元中对应 $v(0)=v'(0)=v(L)=v'(L)=0$ 的行和列：

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8L^2\end{bmatrix} - \frac{P}{30L}\begin{bmatrix}72 & 0\\ 0 & 8L^2\end{bmatrix} = 0$$

特征值问题的最小根为 $P_{cr}=40EI/L^2$, 可比作精确值 $P_{cr}=4\pi^2EI/L^2=39.4784EI/L^2$.

7.30 使用题 7.2 中的结果并消去刚度矩阵中对应 $v(L)=v'(L)=0$ 的第三和第四行与列.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L\\ 6L & 4L^2\end{bmatrix} - \frac{P}{30L}\begin{bmatrix}36 & 3L\\ 3L & 4L^2\end{bmatrix} = 0$$

特征值问题的最小根为 $P_{cr}=2.4852EI/L^2$, 可比作精确值 $P_{cr}=2.4674EI/L^2$.

7.31 对应 $\psi=-1$ 的平面包含前九个结点. 另外, 结点编号在单元的四周是连续的, 并与图 6-12 中对应的二维单元所使用的编号相反, 在那里角结点编号为 1—4, 边中结点被编号为 5—8. 形状函数如下.

角结点：

$$N_1 = -(1-\xi)(1-\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8 \qquad N_3 = (1+\xi)(1-\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8$$

$$N_5 = -(1+\xi)(1+\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8 \qquad N_7 = (1-\xi)(1+\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8$$

$$N_{19} = (1-\xi)(1-\eta)(1+\psi)\xi\eta\psi/8 \qquad N_{21} = -(1+\xi)(1-\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8$$

$$N_{23} = (1+\xi)(1+\eta)(1+\psi)\xi\eta\psi/8 \qquad N_{25} = -(1-\xi)(1+\eta)(1-\psi)\xi\eta\psi/8$$

边中结点：

$$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\psi)\eta\psi/4 \qquad N_4 = -(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\psi)\xi\psi/4$$

$$N_6 = -(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\psi)\eta\psi/4 \qquad N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)(1-\psi)\xi\psi/4$$

$$N_{10} = (1-\xi)(1-\eta)(1\quad\psi^2)\xi\eta/4 \qquad N_{12} = -(1+\xi)(1-\eta)(1\quad\psi^2)\xi\eta/4$$

$$N_{14} = (1+\xi)(1+\eta)(1-\psi^2)\xi\eta/4 \qquad N_{16} = -(1-\xi)(1+\eta)(1-\psi^2)\xi\eta/4$$

$$N_{20} = -(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\psi)\eta\psi/4 \qquad N_{22} = (1+\xi)(1-\eta^2)(1+\psi)\xi\psi/4$$

$$N_{24} = (1-\xi^2)(1+\eta)(1+\psi)\eta\psi/4 \qquad N_{26} = -(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\psi)\xi\psi/4$$

面中结点：

$$N_9 = -(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\psi)\psi/2 \qquad N_{11} = -(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\psi^2)\eta/2$$

$$N_{13} = (1+\xi)(1-\eta^2)(1-\psi^2)\xi/2 \qquad N_{15} = (1-\xi^2)(1+\eta)(1-\psi^2)\eta/2$$

$$N_{17} = -(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\psi^2)\xi/2 \qquad N_{27} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\psi)\psi/2$$

中结点：

$$N_{18} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\psi)^2$$

7.32 图 7-13 的结点编号方案显示对应 $\psi=-1$ 的面包含编号为 1—8 的结点, 且角结点编号为 1—4, 边中结点编号为 5—8.

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(1-\psi)(-\xi-\eta-\psi-2)/8 \qquad N_5 = (1+\xi^2)(1-\eta)(1-\psi)/4$$

$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)(1-\psi)(\xi-\eta-\psi-2)/8 \qquad N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)(1-\psi)/4$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(1-\psi)(\xi+\eta-\psi-2)/8 \qquad N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)(1-\psi)/4$$

$$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(1-\psi)(-\xi+\eta-\psi-2)/8 \qquad N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)(1-\psi)/4$$

$$N_9 = (1-\xi)(1-\eta)(1-\psi^2)/4 \qquad N_{10} = (1+\xi)(1-\eta)(1-\psi^2)/4$$

$$N_{11} = (1+\xi)(1+\eta)(1-\psi^2)/4 \qquad N_{12} = (1-\xi)(1+\eta)(1-\psi^2)/4$$

$$N_{13} = (1-\xi)(1-\eta)(1+\psi)(-\xi-\eta+\psi-2)/8 \qquad N_{17} = (1-\xi^2)(1-\eta)(1+\psi)/4$$

$$N_{14} = (1+\xi)(1\quad\eta)(1+\psi)(\xi\quad\eta+\psi-2)/8 \qquad N_{18} = (1+\xi)(1-\eta^2)(1+\psi)/4$$

$$N_{15} = (1+\xi)(1+\eta)(1+\psi)(\xi+\eta+\psi-2)/8 \qquad N_{19} = (1-\xi^2)(1+\eta)(1+\psi)/4$$

$$N_{16} = (1-\xi)(1+\eta)(1+\psi)(-\xi+\eta+\psi-2)/8 \qquad N_{20} = (1-\xi)(1-\eta^2)(1+\psi)/4$$

7.33

$$N_1=\frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]\quad N_7=\frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

$$N_2=\frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]\quad N_8=\frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

$$N_3=\frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]\quad N_9=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+3\xi)$$

$$N_4=\frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]\quad N_{10}=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-3\xi)$$

$$N_5=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\xi)\quad N_{11}=\frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

$$N_6=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\xi)\quad N_{12}=\frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

附录　偶合稳定状态热弹性的计算机程序编码

在第五章的题 5.8 中推导出偶合的时间依赖热电性的有限元问题.并在题 5.17 中详细讨论了其稳定状态的二维情形.在此附录中将展开二维稳定热电性的有限元程序编码.如同在题 5.8 中导出的那样,时间依赖问题是完全偶合的.当达到稳定状态,温度将不在依赖于时间,并且位移只依赖于应力、位移边界条件和物体内的恒态温度分布.

在题 5.17 中给出了控制微分方程,并在此重复以作为参考.

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} - \beta\theta_{,i} = -f_i \tag{A.1}$$

$$k_{ij}\theta_{,ij} = -r \qquad k_{ij} = 0, \qquad i \neq j \tag{A.2}$$

其中 ε_{kl}是用位移定义的应变,θ 是从某基本温度为超始的温度变化,f_i 和 r 分别为体积力和外部热源.材料常数为 C_{ijkl},β 和 k_{ij}.对应的有限元方程为

$$[\mathrm{K}_{uu}]\{\mathrm{u}\} - [\mathrm{K}_{u\theta}]\{\theta\} = \{\mathrm{f}\} + \{\bar{\tau}\} \tag{A.3}$$

$$[\mathrm{K}_{\theta\theta}]\{\theta\} = \{\mathrm{r}\} + \{\bar{\mathrm{Q}}\} \tag{A.4}$$

其中$\{\bar{\tau}\}\{\bar{\mathrm{Q}}\}$是表面边界条件.

主程序

数组参数的维数定义被安排在第 100—200 行的语句中.第 305 行(GOSUB 1000)是一个定义了在题 5.18 中讨论的变换矩阵的子程序.

在一个坐标系中必须定义问题的几何特性,本例中使用了笛卡儿坐标和等参有限单元.像结点数、单元数、每结点处的自由度、不同的材料参数的个数和边界条件数的基本数据必须作为初始条件输入到计算机之中.见程序中的 320—420 行.

定义如下的参数:

NP　⇒　结点数

NE　⇒　单元数

NODE　⇒　每单元结点数

NB　⇒　本质边界条件数(见第二章)

NDF　⇒　每结点处的自由度

NMAT　⇒　不同材料数

NCON　⇒　每种材料的材料常数的个数

能够定义结点在坐标系中的位置和结点与单元的关系.这些在第三章中定义为结点坐标数组和连通数组.在这里它们被定义如下.每个数组的维数是任意的,并且在程序中维数大到足以容纳一个问题.

CORD(50,2)　⇒　结点坐标数组(结点数,x 和 y 的位置)

NOD(20,8)　⇒　连通数组(单元数,每个单元的结点数)

几何图形,材料参数和本质边界条件包含在程序的 300—920 行中.自然边界条件在 1000—1150 中输入.

材料特性可以在单元之间变化,并且当 NMAT 是不同材料数以及 NCON 是材料常数的个数时,就要定义两个附加数组以存储材料信息.

MAT(20)　⇒　材料数(每个单元必须有一个表示此单元材料的材料数)

CON(5,10)　⇒　材料数和对应的每种材料的数值

边界条件有两种类型,本质和自然.本质边界条件是引用一些标准的 x 方向上的 u 和 y 方向上的 v 以及温度变化 θ.参数 NBC 分离的边界条件数,并需要下面的数组存储本质边界条件数据.

NBC(25)　　⇒　出现边界条件的结点数

NDOF(25)　　⇒　自由度，$1\Rightarrow u, 2\Rightarrow v, 3\Rightarrow\theta$

DIS(25)　　⇒　边界条件的数值

自然边界条件是表面拖曳力和/或热流，并且读入到程序中，使用 IF 语句来结束输入过程. 数据表示为

结点数，x 输入，y 输入，垂直于表面的热流

即使所有的自然边界条件都为零，对应 NP 的最后一个结点必须作为数据输入，以便结束输入过程.

刚度矩阵公式的形成开始于 1200 行，1220 行定义了整体刚度矩阵的大小. 等参单元需要数值积分，且在程序的 1230—1290 中定义了一个高斯积分(见题 6.1). 形成整体刚度矩阵公式的 FOR-NEXT 计算循环开始于 2070 行并一直到 2580 行. 在 2084 行调用(GOSUB 4000)并在 6620 行返回(RETURN 2400)的子程序含有稳定状态热弹性的局部刚度矩阵的计算. 局部刚度矩阵在子程序中形成，而整体刚度矩阵在 2410—2570 行中组合而成.

在 2800—2990 行的整体刚度矩阵包括位移和温度边界条件. 边界条件的包含将遵循第二章题 2.13 中介绍的概念.

使用一个在 3000 行调入(GOSUB 9010)的高斯消去子程序解矩阵方程[K]{x} = {f}. 子程序包含在 9000—9390 行中并返回到 3300 行. 在第一章中讨论了高斯消去法，并在题1.16中说明所使用的方法.

每个结点和单元的位移和温度结果在 3310—3450 行中被打印出来. 3310—3330 行给出一个所有结果的快速输出. 3350—3450 行允许输出每个单元中每个结点上的结果.

在 3470 行调用了一个计算应力和温度流的子程序(GOSUB 7000). 7000—8240 行中包含了计算应力和温度流并输出结果的子程序.

对构造局部刚度矩阵和计算最后单元结果的子程序的另外讨论是必要的. 通过修改这两个子程序和定义局部刚度矩阵变换的子程序，此计算机原程序能适合具有任意自由度的问题.

局部刚度矩阵

局部刚度矩阵有式(A.3)和(A.4)的定义并包含在 4000—6620 行中. 使用坐标数组和连通数组，在 4010—4040 行中定义了四结点单元的坐标. 注意子程序是在 FOR-NEXT 循环内被调用的并且包含所有的单元(2070 行). 4050—4090 行将刚度矩阵初始化为零，这一步是必要的，因为相同的矩阵 S(I,J)被每个刚度矩阵使用. 4200—4210 开始一个进行数值积分的 FOR-NEXT 循环. 数值积分和几何变换遵循在题 6.9, 6.10 和 6.11 中详细叙述的基本方法. 插值(形状)函数和它们的导数在 9800—9930 之间的子程序中定义，并在题 6.4 中推导出关于一个四结点单元的情形. 题 6.6 和 6.7 中 Jacobi 矩阵在 4270—4390 行中构造，其中 SJ(I,J)是 Jacobi 矩阵而 SJIN(I,J)是逆矩阵. 与题 6.8 式(b)中的相等的形状函数导数矩阵在 4410—4530 之间定义. 题 6.6 中的式(h)在 4550 行中定义.

刚度矩阵被构造成一个 12×12 矩阵并可用程序中的符号写为如下

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & - & [K_{u\theta}] \\ 0 & & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [BST][D][BS] & - & [BST][BA][P] \\ [0] & & [TST][DK][TS] \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

式(A.5)可直接从题 5.17 的式(o)和(p)给出刚度矩阵的推导中得到. 矩阵[BS]的形式如同题 6.10 中式(a). 矩阵[D]是题 6.10 中的矩阵[C]，并且[K_{uu}]的公式的形成与题6.11 中的相同. 矩阵[BS]，[D]和[BST]在计算机程序的 4560—5020 行中构造.

使用 9500—9630 之间的子程序完成所有的矩阵乘法. 子程序将执行[AM][BM] = [CM]的计算，并且要用 5030—5260 行设置参数，同时调用两次子程序计算对[K_{uu}]的作用. 刚度矩阵中的[K_{uu}]部分被加到 5270—5310 行中的局部刚度矩阵，其中它也被 DA，题 6.6 中的式(h)，相乘. 注意刚度矩阵从子程序中返回为 CM(I,J).

刚度矩阵的[$K_{\theta\theta}$]部分相等于题 6.9 中的部分，它在 5400—5730 行中构造并被加到

5740—5780 之间的刚度矩阵之中.刚度矩阵的[$K_{u\theta}$]部分已在题 5.30 中详细讨论并在 5900—6210 中构造.注意在 6030 中使用了在形状函数子程序(9800—9930)中定义的形状函数.矩阵[$K_{u\theta}$]被加到 6220—6260 之间的刚度矩阵.6270—6280 完成了数值积分循环.6400—6610 行包含了根据题 5.18 对自由度进行重新排序的矩阵乘法(见第三章中的矩阵变换).

材料常数在数组 CON(I,J)中定义,其中 I 是材料数,J 是材料常数.每个单元有一个材料数,并作为数据在 660 行中输入.刚度矩阵中的材料数在 2080 行中确定.热弹性问题的材料参数确定如下:

CON(L1,1) = E

CON(L1,2) = v(题 6.11)

CON(L1,3) = k_x

CON(L1,4) = k_y(题 6.9)

CON(L1,5) = β_x

CON(L1,6) = β_y(题 5.31)

应力和流计算

单元结果在子程序中计算,且此子程序在 3470 行中调用并包含在 7000—8240 行之中.回顾题 3.10 的式(c)和(h).对于热弹性问题,是根据题 5.17 中的式(k)计算应力.温度流计算为 {q} = − [k][B]{θ},或用计算机程序符号表示为{FLX} = − [CON][TS]{TEMP}.温度流在 7960—8090 行中计算.用两步计算应力.应变 STA 在 7780—7860 行中计算.单元应力在 7870—7950 行中计算.有限单元内部插值点的位置在 8100—8150 行中计算.

例题

关于题 5.18 的输入数据包含在本附录尾.关于位移和温度的结果在表 5.2 中给出.应力和温度流可与分析解比较,此分析解可通过继续题 5.17 的分析得到.

使用题 5.17 中的式(e)可计算出应力:

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} - \beta\theta$$

在此处分析的一维情形变为

$$\sigma = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \beta\theta \quad 和 \quad q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

代入题 5.18 的结果得到

$$\sigma = -\frac{\beta\theta_0}{2} \quad 和 \quad q = \frac{k\theta_0}{L}$$

数据

用 BASIC 语言编写的程序的输入数据可作为程序尾处的 DATA 语句进行输入.题 5.18 的数据表示如下.假设有一条单位长度和单位宽度的材料.

```
DATA 10,4,4,13,3,1,6          (line 330)
DATA 1,1,0                    (coordinate array)
DATA 2,0,1                    (lines 460-540)
DATA 3,.25,0
DATA 4,.25,1
DATA 5,.5,0
DATA 6,.5,1
DATA 7,.75,0
DATA 8,.75,1
DATA 9,1,0
DATA 10,1,1
DATA 1,1,3,4,2,1              (connectivity array and material number)
```

```
DATA 2,3,5,6,4,1              (lines 560-690)
DATA 3,5,7,8,6,1
DATA 4,7,9,10,8,1
DATA 1,1,0,1,1,1,0            (material data, lines 730-810)
DATA 1,1,0                    (boundary conditions)
DATA 2,1,0                    (lines 840-920)
DATA 1,2,0
DATA 3,2,0
DATA 5,2,0
DATA 7,2,0
DATA 9,2,0
DATA 9,1,0
DATA 10,1,0
DATA 1,3,100
DATA 2,3,100
DATA 9,3,0
DATA 10,3,0
DATA 10,0,0,0                 (surface tractions and flux, lines 1010-1150)
10 REA STEADY STATE THERMOELASTICITY
20 REM STRESST.BAS __ ISOPARAMETRIC ELEMENT
30 REM FOUR NODE OR EIGHT NODE FORMULATION
100 DIM CORD(50,2),NOD(20,4),MAT(20),CON(5,10)
110 DIM NBC(25),NDOF(25),DIS(25)
120 DIM TEMP(4),UELE(8),STA(3),STR(3),FLX(2)
130 DIM SK(50,50),F1(50)
140 DIM XG(3),WG(3),P(8),DEL(2,8),XJ(8),YJ(8)
150 DIM SJ(2,2),SJIN(2,2),SF(2,4),BS(3,8),BST(8,3)
160 DIM D(3,3),BA(3,2),DK(2,2),TS(2,4),TST(4,2)
170 DIM S(12,12)
180 DIM F(50),X(50),ELDIS(50)
190 DIM AM(12,12),BM(12,12),CM(12,12)
200 DIM T(12,12),TT(12,12)
300 REM
305 GOSUB 10000
306 REM RETURN FROM GOSUB
310 REM
320 REM READ INITIAL DATA
330 READ NP,NE,NODE,NB,NDF,NMAT,NCON
340 PRINT "            "
350 PRINT USING "# # # #";NP,NE,NODE,NB,NDF,NMAT,NCON
360 PRINT "NP = ",NP
370 PRINT "NE = ",NE
380 PRINT "NODE = ",NODE
390 PRINT "NB = ",NB
400 PRINT "NDF = ",NDF
410 PRINT "NMAT = ",NMAT
420 PRINT "NCON = ",NCON
430 REM
```

```
440 PRINT "
450 REM READ COORDINATE ARRAY
460 PRINT "        COORDINATE ARRAY"
470 FOR I = 1 TO NP
480 READ N
490 FOR J = 1 TO 2
500 READ CORD(N,J)
510 NEXT J
520 PRINT "NODE",N,CORD(N,1),CORD(N,2)
530 INPUT "          RETURN TO CONTINUE CORD",GO $
540 NEXT I
550 REM
560 REM READ CONNECTIVITY
570 PRINT "          "
580 PRINT "          CONNECTIVITY"
590 FOR I = 1 TO NE
600 READ N
610 PRINT "     ELEMENT # ",N
620 FOR J = 1 TO NODE
630 READ NOD(N,J)
640 PRINT "          ",NOD(N,J)
650 NEXT J
660 READ MAT(I)
670 PRINT "MATERIAL #",MAT(I)
680 INPUT "          RETURN TO CONTINUE ELEMENTS",GO $
690 NEXT I
700 REM
710 REM READ MATERIAL DATA
720 PRINT "          "
730 PRINT "          MATERIAL DATA"
740 FOR I = 1 TO NMAT
750 READ L
760 PRINT "MATERIAL # ",L
770 FOR J = 1 TO NCON
780 READ CON(L,J)
790 PRINT L,J,CON(L,J)
800 NEXT J
810 INPUT "          RETURN TO CONTINUE MATERIALS",GO $
820 NEXT I
830 REM
840 REM READ ESSENTIAL BOUNDARY DATA
850 PRINT "          "
860 PRINT "          ESSENTIAL BOUNDARY CONDITIONS"
870 PRINT "NODE","DEGREE OF FREEDOM","VALUE"
880 FOR I = 1 TO NB
890 READ NBC(I),NDOF(I),DIS(I)
900 PRINT NBC(I),NDOF(I), "        ",DIS(I)
910 NEXT I
920 INPUT "          RETURN TO CONTINUE",GO $
```

```
1000 REM
1010 REM READ NATURAL BOUNDARY CONDITIONS
1020 REM STORE IN LOAD VECTOR
1030 PRINT "            "
1040 PRINT "            NATURAL BOUNDARY CONDITIONS"
1050 READ NATNO
1060 PRINT "NODE = ", NATNO
1070 FOR K = 1 TO NDF
1080 READ FLUX
1090 PRINT "BOUNDARY CONDITION  = ", FLUX
1100 M = (NATNO - 1) * NOF + K
1110 F1(M) = F1(M) + FLUX
1120 NEXT K
1130 INPUT "            RETURN TO CONTINUE B. C.", GO $
1140 IF NATNO = NP THEN 1150 ELSE 1050
1150 REM NATURAL BOUNDARY CONDITION FINISHED
1200 REM
1210 REM BEGIN TO FORM STIFFNESS MATRIX
1220 NSIZE = NP * NDF
1230 REM DEFINE XG AND WG FOR 2X2 INTEGRATION
1260 XG(1) = - .577350269 #
1270 XG(2) = - XG(1)
1280 WG(1) = 1
1290 WG(2) = 1
2000 REM
2010 REM BEGIN TO FORM K MATRIX
2020 FOR I = 1 TO NSIZE
2030 FOR J = 1 TO NSIZE
2040 SK(I, J) = 0
2050 NEXT J
2060 NEXT I
2070 FOR N = 1 TO NE
2075 PRINT "ELEMENT", N
2080 L1 = MAT(N)
2082 REM CALL GOSUB FOR LOCAL STIFFNESS
2084 GOSUB 4000
2400 REM ASSEMBLE GLOBAL STIFFNESS MATRIX
2410 I = 0
2420 FOR JJ = 1 TO NODE
2430 NROW = (NOD(N, JJ) - 1) * NDF
2440 FOR J = 1 TO NDF
2450 NROW = NROW + 1
2460 I = I + 1
2470 L = 1
2480 FOR KK = 1 TO NODE
2490 NCOL = (NOD(N, KK) - 1) * NDF
2500 FOR K = 1 TO NDF
2510 NCOL = NCOL + 1
2520 SK(NROW, NCOL) = SK(NROW, NCOL) + S(I, L)
```

```
2530 L = L + 1
2540 NEXT K
2550 NEXT KK
2560 NEXT J
2570 NEXT JJ
2580 NEXT N
2800 REM ESSENTIAL BOUNDARY CONDITION
2810 FOR N = 1 TO NB
2820 I = NBC(N)
2830 NROW = (I - 1) * NDF
2840 IF NDOF(N) = 1 THEN 2850 ELSE 2860
2850 NROW = NROW + 1
2860 IF NDOF(N) = 2 THEN 2870 ELSE 2880
2870 NROW = NROW + 2
2880 IF NDOF(N) = 3 THEN 2890 ELSE 2900
2890 NROW = NROW + 3
2900 F1(NROW) = DIS(N)
2910 SK(NROW, NROW) = 1
2920 FOR J = 1 TO NSIZE
2930 IF J = NROW THEN 2980 ELSE 2940
2940 ADD = SK(J, NROW) * DIS(N)
2950 F1(J) = F1(J) - ADD
2960 SK(NROW, J) = 0
2970 SK(J, NROW) = 0
2980 NEXT J
2990 NEXT N
3000 GOSUB 9010
3300 REM * * * * PRINT NODE RESULTS * * * *
3310 FOR II = 1 TO NSIZE STEP 3
3320 PRINT II, ELDIS(II), II + 1, ELDIS(II + 1), II + 2, ELDIS(II + 2)
3330 NEXT II
3340 INPUT "HIT RETURN TO CONTINUE", GO $
3350 FOR N = 1 TO NE
3360 PRINT "RESULTS FOR ELEMENT", N
3380 FOR I = 1 TO NODE
3390 M = NOD(N, I)
3400 MK = M * NDF
3410 PRINT "NODE", "      U", "      V", "      TEMP"
3420 PRINT M, ELDIS(MK - 2), ELDIS(MK - 1), ELDIS(MK)
3430 NEXT I
3440 INPUT "HIT RETURN TO CONTINUE", GO $
3450 NEXT N
3460 REM COMPUTE STRESSES
3470 GOSUB 7000
3480 PRINT STRESS AND FLUX
3485 REM
3490 STOP
3500 REM END OF PROGRAM
3510 REM
```

```
4000 REM QUADRILATERAL ELEMENT
4010 FOR I = 1 TO NODE
4020 XJ(I) = CORD(NOD(N,I),1)
4030 YJ(I) = CORD(NOD(N,I),2)
4040 NEXT I
4050 FOR I = 1 TO NODE * NDF
4060 FOR J = 1 TO NODE * NDF
4070 S(I,J) = 0
4080 NEXT J
4090 NEXT I
4100 NGAU = 2
4200 FOR I = 1 TO NGAU
4210 FOR J = 1 TO NGAU
4220 G = XG(I)
4230 H = XG(J)
4240 GOSUB 9800
4250 REM GOSUB DEFINES GEOMETRY FOR TRANSFORMATION
4260 REM FORM 2X2 JACOBIAN MATRIX
4270 SJ(1,1) = DEL(1,1) * XJ(1) + DEL(1,2) * XJ(2)
4280 SJ(1,1) = SJ(1,1) + DEL(1,3) * XJ(3) + DEL(1,4) * XJ(4)
4290 SJ(2,1) = DEL(2,1) * XJ(1) + DEL(2,2) * XJ(2)
4300 SJ(2,1) = SJ(2,1) + DEL(2,3) * XJ(3) + DEL(2,4) * XJ(4)
4310 SJ(1,2) = DEL(1,1) * YJ(1) + DEL(1,2) * YJ(2)
4320 SJ(1,2) = SJ(1,2) + DEL(1,3) * YJ(3) + DEL(1,4) * YJ(4)
4330 SJ(2,2) = DEL(2,1) * YJ(1) + DEL(2,2) * YJ(2)
4340 SJ(2,2) = SJ(2,2) + DEL(2,3) * YJ(3) + DEL(2,4) * YJ(4)
4350 DETJ = SJ(1,1) * SJ(2,2) - SJ(2,1) * SJ(1,2)
4360 SJIN(1,1) = SJ(2,2)/DETJ
4370 SJIN(1,2) = - SJ(1,2)/DETJ
4380 SJIN(2,1) = - SJ(2,1)/DETJ
4390 SJIN(2,2) = SJ(1,1)/DETJ
4400 REM COMPUTE SHAPE FUNCTIONS IN CART. COORD.
4410 REM ZERO SHAPE FUNCTION MATRIX
4420 FOR M = 1 TO 2
4430 FOR MM = 1 TO 4
4440 SF(M,MN) = 0
4450 NEXT MM
4460 NEXT M
4470 FOR II = 1 TO 2
4480 FOR KK = 1 TO NODE
4490 FOR JJ = 1 TO 2
4500 SF(II,KK) = SF(II,KK) + DEL(JJ,KK) * SJIN(II,JJ)
4510 NEXT JJ
4520 NEXT KK
4530 NEXT II
4540 REM MULT. BY DETJ AND WEIGHT FUNCTIONS
4550 DA = DETJ * WG(I) * WG(J)
4560 REM B AND B TRANSPOSE MATRICES
4570 FOR II = 1 TO 3
```

```
4580 FOR JJ = 1 TO 8
4590 BS(II,JJ) = 0
4600 NEXT JJ
4610 NEXT II
4800 JJ = 1
4810 FOR II = 1 TO 8 STEP 2
4820 BS(1,II) = SF(1,JJ)
4830 BS(2,II + 1) = SF(2,JJ)
4840 BS(3,II) = SF(2,JJ)
4850 BS(3,II - 1) = SF(1,JJ)
4860 JJ = JJ + 1
4870 NEXT II
4880 FOR II = 1 TO 3
4890 FOR JJ = 1 TO 8
4900 BST(JJ,II) = BS(II,JJ)
4910 NEXT JJ
4920 NEXT II
4930 C2 = 1 - (CON(L1,2) * CON(L1,2))
4940 D(1,1) = CON(L1,1)/C2
4950 D(2,2) = D(1,1)
4960 D(1,2) = D(1,1) * CON(L1,2)
4970 D(3,3) = CON(L1,1)/(2 * (1 + CON(L1,2)))
4980 D(1,3) = 0
4990 D(2,3) = 0
5000 D(3,1) = 0
5010 D(3,2) = 0
5020 D(2,1) = D(1,2)
5030 FOR II = 1 TO 3
5040 FOR JJ = 1 TO 3
5050 AM(II,JJ) = D(II,JJ)
5060 NEXT JJ
5070 FOR KK = 1 TO 8
5080 BM(II,KK) = BS(II,KK)
5090 NEXT KK
5100 NEXT II
5110 LM = 3
5120 NM = 8
5130 MM = 3
5140 GOSUB 9500
5150 FOR II = 1 TO 3
5160 FOR JJ = 1 TO 8
5170 BM(II,JJ) = CM(II,JJ)
5180 NEXT JJ
5190 FOR KK = 1 TO 8
5200 AM(KK,II) = BST(KK,II)
5210 NEXT KK
5220 NEXT II
5230 LM = 8
5240 NM = 8
```

```
5250 MM = 3
5260 GOSUB 9500
5270 FOR II = 1 TO 8
5280 FOR JJ = 1 TO 8
5290 S(II,JJ) = S(II,JJ) + CM(II,JJ) * DA
5300 NEXT JJ
5310 NEXT II
5400 FOR II = 1 TO NODE
5410 TS(1,II) = SF(1,II)
5420 TS(2,II) = SF(2,II)
5430 TST(II,1) = TS(1,II)
5440 TST(II,2) = TS(2,II)
5450 NEXT II
5460 DK(1,1) = CON(L1,3)
5470 DK(2,2) = CON(L1,4)
5480 DK(1,2) = 0
5490 DK(2,1) = 0
5500 FOR II = 1 TO 2
5510 FOR JJ = 1 TO 2
5520 AM(II,JJ) = DK(II,JJ)
5530 NEXT JJ
5540 FOR KK = 1 TO 4
5550 BM(II,KK) = TS(II,KK)
5560 NEXT KK
5570 NEXT II
5580 LM = 2
5590 NM = 4
5600 MM = 2
5610 GOSUB 9500
5620 FOR II = 1 TO 2
5630 FOR JJ = 1 TO 4
5640 BM(II,JJ) = CM(II,JJ)
5650 NEXT JJ
5660 FOR KK = 1 TO 4
5670 AM(KK,II) = TST(KK,II)
5680 NEXT KK
5690 NEXT II
5700 LM = 4
5710 NM = 4
5720 MM = 2
5730 GOSUB 9500
5740 FOR II = 1 TO 4
5750 FOR JJ = 1 TO 4
5760 S(II + 8,JJ + 8) = S(II + 8,JJ + 8) + CM(II,JJ) * DA
5770 NEXT JJ
5780 NEXT II
5900 BA(1,1) = CON(L1,5)
5910 BA(2,2) = CON(L1,6)
5920 BA(1,2) = 0
```

```
5930 BA(2,1) = 0
5940 BA(3,1) = 0
5950 BA(3,2) = 0
5960 FOR II = 1 TO 3
5970 FOR JJ = 1 TO 2
5980 AM(II,JJ) = BA(II,JJ)
5990 NEXT JJ
6000 NEXT II
6010 FOR II = 1 TO 2
6020 FOR KK = 1 TO 4
6030 BM(II,KK) = P(KK)
6040 NEXT KK
6050 NEXT II
6060 LM = 3
6070 NM = 4
6080 MM = 2
6090 GOSUB 9500
6100 FOR II = 1 TO 3
6110 FOR JJ = 1 TO 4
6120 BM(II,JJ) = CM(II,JJ)
6130 NEXT JJ
6140 FOR KK = 1 TO 8
6150 AM(KK,II) = BST(KK,II)
6160 NEXT KK
6170 NEXT II
6180 LM = 8
6190 NM = 4
6200 MM = 3
6210 GOSUB 9500
6220 FOR II = 1 TO 8
6230 FOR JJ = 1 TO 4
6240 S(II,JJ + 8) = S(II,JJ + 8) + (CM(II,JJ) * DA)
6250 NEXT JJ
6260 NEXT II
6270 NEXT J
6280 NEXT I
6400 LM = 12
6410 MM = 12
6420 NM = 12
6430 FOR II = 1 TO 12
6440 FOR JJ = 1 TO 12
6450 AM(II,JJ) = T(II,JJ)
6460 BM(II,JJ) = S(II,JJ)
6470 NEXT JJ
6480 NEXT II
6490 GOSUB 9500
6500 FOR II = 1 TO 12
6510 FOR JJ = 1 TO 12
6520 AM(II,JJ) = CM(II,JJ)
```

```
6530 BM(II,JJ) = TT(II,JJ)
6540 NEXT JJ
6550 NEXT II
6560 GOSUB 9500
6570 FOR II = 1 TO 12
6580 FOR JJ = 1 TO 12
6590 S(II,JJ) = CM(II,JJ)
6600 NEXT JJ
6610 NEXT II
6620 RETURN 2400
7000 REM COMPUTE STRESSES
7010 FOR N = 1 TO NE
7020 L1 = MAT(N)
7030 FOR I = 1 TO NODE
7040 XJ(I) = CORD(NOD(N,I),1)
7050 YJ(I) = CORD(NOD(N,I),2)
7060 NEXT I
7070 FOR I = 1 TO NODE * NDF
7080 FOR J = 1 TO NODE * NDF
7090 S(I,J) = 0
7100 NEXT J
7110 NEXT I
7120 NGAU = 2
7130 FOR IN = 1 TO NGAU
7140 FOR JN = 1 TO NGAU
7150 G = XG(IN)
7160 H = XG(JN)
7170 GOSUB 9800
7180 REM FORM 2X2 JACOBIAN MATRIX
7190 SJ(1,1) = DEL(1,1) * XJ(1) + DEL(1,2) * XJ(2)
7200 SJ(1,1) = SJ(1,1) + DEL(1,3) * XJ(3) + DEL(1,4) * XJ(4)
7210 SJ(2,1) = DEL(2,1) * XJ(1) + DEL(2,2) * XJ(2)
7220 SJ(2,1) = SJ(2,1) + DEL(2,3) * XJ(3) + DEL(2,4) * XJ(4)
7230 SJ(1,2) = DEL(1,1) * YJ(1) + DEL(1,2) * YJ(2)
7240 SJ(1,2) = SJ(1,2) + DEL(1,3) * YJ(3) + DEL(1,4) * YJ(4)
7250 SJ(2,2) = DEL(2,1) * YJ(1) + DEL(2,2) * YJ(2)
7260 SJ(2,2) = SJ(2,2) + DEL(2,3) * YJ(3) + DEL(2,4) * YJ(4)
7270 DETJ = SJ(1,1) * SJ(2,2) - SJ(2,1) * SJ(1,2)
7280 SJIN(1,1) = SJ(2,2)/DETJ
7290 SJIN(1,2) = - SJ(1,2)/DETJ
7300 SJIN(2,1) = - SJ(2,1)/DETJ
7310 SJIN(2,2) = SJ(1,1)/DETJ
7320 REM COMPUTE SHAPE FUNCTIONS IN CART. COORD.
7330 REM ZERO SHAPE FUNCTION MATRIX
7340 FOR M = 1 TO 2
7350 FOR MM = 1 TO 4
7360 SF(M,MM) = 0
7370 NEXT MM
7380 NEXT M
```

```
7390 FOR II = 1 TO 2
7400 FOR KK = 1 TO NODE
7410 FOR JJ = 1 TO 2
7420 SF(II,KK) = SF(II,KK) + DEL(JJ,KK) * SJIN(II,JJ)
7430 NEXT JJ
7440 NEXT KK
7450 NEXT II
7460 REM B MATRIX TO COMPUTE STRESS
7470 FOR II = 1 TO 3
7480 FOR JJ = 1 TO 8
7490 BS(II,JJ) = 0
7500 NEXT JJ
7510 NEXT II
7520 JJ = 1
7530 FOR II = 1 TO 8 STEP 2
7540 BS(1,II) = SF(1,JJ)
7550 BS(2,II + 1) = SF(2,JJ)
7560 BS(3,II) = SF(2,JJ)
7570 BS(3,II + 1) = SF(1,JJ)
7580 JJ = JJ + 1
7590 NEXT II
7600 C2 = 1 - (CON(L1,2) * CON(L1,2))
7610 D(1,1) = CON(L1,1)/C2
7620 D(2,2) = D(1,1)
7630 D(1,2) = D(1,1) * CON(L1,2)
7640 D(3,3) = CON(L1,1)/(2 * (1 + CON(L1,2)))
7650 D(2,1) = D(1,2)
7660 D(1,3) = 0
7670 D(2,3) = 0
7680 D(3,1) = 0
7690 D(3,2) = 0
7700 J = 1
7710 FOR I = 1 TO NODE
7720 M = NOD(N,I) * NDF
7730 TEMP(I) = ELDIS(M)
7740 UELE(J) = ELDIS(M - 2)
7750 UELE(J + 1) = ELDIS(M - 1)
7760 J = J + 2
7770 NEXT I
7780 FOR I = 1 TO 3
7790 STA(I) = 0
7800 STR(I) = 0
7810 NEXT I
7820 FOR I = 1 TO 3
7830 FOR J = 1 TO 8
7840 STA(I) = STA(I) + BS(I,J) * UELE(J)
7850 NEXT J
7860 NEXT I
7870 FOR I = 1 TO 3
```

```
7880 FOR J = 1 TO 3
7890 STR(I) = STR(I) + D(I,J) * STA(J)
7900 NEXT J
7910 NEXT I
7920 FOR I = 1 TO NODE
7930 STR(1) = STR(1) + CON(L1,5) * P(I) * TEMP(I)
7940 STR(2) = STR(2) + CON(L1,6) * P(I) * TEMP(I)
7950 NEXT I
7960 FOR II = 1 TO NODE
7970 TS(1,II) = SF(1,II)
7980 TS(2,II) = SF(2,II)
7990 NEXT II
8000 FOR J = 1 TO NODE
8010 TS(1,J) = TS(1,J) * CON(L1,3)
8020 TS(2,J) = TS(2,J) * CON(L1,4)
8030 NEXT J
8040 FLX(1) = 0
8050 FLX(2) = 0
8060 FOR J = 1 TO NODE
8070 FLX(1) = FLX(1) - TS(1,J) * TEMP(J)
8080 FLX(2) = FLX(2) - TS(2,J) * TEMP(J)
8090 NEXT J
8100 X = 0
8110 Y = 0
8120 FOR I = 1 TO NODE
8130 X = X + P(I) * XJ(I)
8140 Y = Y + P(I) * YJ(I)
8150 NEXT I
8160 PRINT "ELEMENT", N
8170 PRINT "        X = ", X, "        Y = ", Y
8172 PRINT "        STRESS X = ", STR(1)
8174 PRINT "        STRESS Y = ", STR(2)
8176 PRINT "        STRESS XY = ", STR(3)
8190 PRINT "        TEMP FLUX X = ", FLX(1)
8191 PRINT "        TEMP FLUX Y = ", FLX(2)
8200 INPUT "RETURN TO CONTINUE", GO$
8210 NEXT JN
8220 NEXT IN
8230 NEXT N
8240 RETURN
9000 REM GAUSSIAN ELIMINATION
9010 N = NSIZE
9020 FOR I = 1 TO N
9030 ELDIS(I) = 0
9040 NEXT I
9050 J = 1
9060 AA = SK(J,J)
9070 FOR I = J TO N
9080 IF AA = 0 THEN 9090 ELSE 9110
```

```
9090 PRINT "ZERO ON DIAGONAL, ROW",J
9100 STOP
9110 REM
9120 SK(J,I) = SK(J,I)/AA
9130 NEXT I
9140 F1(J) = F1(J)/AA
9150 IF J = N THEN 9280 ELSE 9160
9160 K = J + 1
9170 C = SK(K,J)
9180 IF C = 0 THEN 9230 ELSE 9190
9190 FOR I = J TO N
9200 SK(K,I) = SK(K,I) - C * SK(J,I)
9210 NEXT I
9220 F1(K) = F1(K) - C * F1(J)
9230 K = K + 1
9240 IF K>N THEN 9250 ELSE 9170
9250 REM, START ANOTHER LOOP
9260 J = J + 1
9270 GOTO 9060
9280 REM COMPUTE ELDIS
9290 ELDIS(N) = F1(N)
9300 J = 1
9310 NN = N - J
9320 ELDIS(NN) = F1(NN)
9330 FOR I = NN TO N - 1
9340 ELDIS(NN) = ELDIS(NN) - SK(NN,I + 1) * ELDIS(I + 1)
9350 NEXT I
9360 J = J + 1
9370 IF NN = 1 THEN 9380 ELSE 9310
9380 REM SUBROUTINE FINISHED
9390 RETURN 3300
9500 REM MATRIX MULTIPLICATION
9510 FOR IM = 1 TO LM
9520 FOR JM = 1 TO NM
9530 CM(IM,JM) = 0
9540 NEXT JM
9550 NEXT IM
9560 FOR IM = 1 TO LM
9570 FOR JM = 1 TO NM
9580 FOR KM = 1 TO MM
9590 CM(IM,JM) = CM(IM,JM) + AM(IM,KM) * BM(KM,JM)
9600 NEXT KM
9610 NEXT JM
9620 NEXT IM
9630 RETURN
9800 REM GOSUB FOR 4 NODE ELEMENT
9810 P(1) = (1 - G - H + G * H)/4
9820 P(2) = (1 + G - H - G * H)/4
9830 P(3) = (1 + G + H + G * H)/4
```

```
9840 P(4) = (1 - G + H - G * H)/4
9850 DEL(1,1) = ( - 1 + H)/4
9860 DEL(1,2) = - DEL(1,1)
9870 DEL(1,3) = (1 + H)/4
9880 DEL(1,4) = - DEL(1,3)
9890 DEL(2,1) = ( - 1 + G)/4
9900 DEL(2,2) = ( - 1 - G)/4
9910 DEL(2,3) = - DEL(2,2)
9920 DEL(2,4) = - DEL(2,1)
9930 RETURN
10000 REM GOSUB FOR TRANSFORMATION
10010 FOR I = 1 TO 12
10020 FOR J = 1 TO 12
10030 T(I,J) = 0
10040 NEXT J
10050 NEXT I
10060 T(1,1) = 1
10070 T(2,2) = 1
10080 T(3,9) = 1
10090 T(4,3) = 1
10100 T(5,4) = 1
10110 T(6,10) = 1
10120 T(7,5) = 1
10130 T(8,6) = 1
10140 T(9,11) = 1
10150 T(10,7) = 1
10160 T(11,8) = 1
10170 T(12,12) = 1
10180 FOR I = 1 TO 12
10190 FOR J = 1 TO 12
10200 TT(I,J) = T(J,I)
10210 NEXT J
10220 NEXT I
10230 RETURN 306
12000 DATA 10,4,4,13,3,1,6
12010 DATA 1,0,0,2,0,1,3,.25,0,4,.25,1
12020 DATA 5,.5,0,6,.5,1,7,.75,0
12030 DATA 8,.75,1,9,1,0,10,1,1
12040 DATA 1,1,3,4,2,1
12050 DATA 2,3,5,6,4,1
12060 DATA 3,5,7,8,6,1
12070 DATA 4,7,9,10,8,1
12080 DATA 1,1,0,1,1,1,0
12090 DATA 1,1,0,2,1,0,1,2,0
12100 DATA 9,1,0,10,1,0
12110 DATA 1,3,100,2,3,100,9,3,0,10,3,0
12120 DATA 3,2,0,5,2,0,7,2,0,9,2,0
12130 DATA 10,0,0,0
```